

## **PROJETO DE GRADUAÇÃO**

# **MODELO PARA PREVISÃO DO TAMANHO DE TRINCAS QUE PARAM DE CRESCER EM CARREGAMENTOS DE FRETTING**

Por,  
**Raphael Araújo Cardoso**

**Brasília, 27 de junho de 2014**

**UNIVERSIDADE DE BRASILIA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECANICA**

PROJETO DE GRADUAÇÃO

**MODELO PARA PREVISÃO DO TAMANHO DE  
TRINCAS QUE PARAM DE CRESCER EM  
CARREGAMENTOS DE FRETTING**

POR,

**Raphael Araújo Cardoso**

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção  
do grau de Engenheiro Mecânico.

**Banca Examinadora**

Prof. José Alexander Araújo, UnB/ ENM (Orientador) \_\_\_\_\_

Prof. Edgar Nobuo Mamy, UnB/ ENM \_\_\_\_\_

Prof. Jorge Luiz de Almeida Ferreira, UnB/ ENM \_\_\_\_\_

Brasília, 27 de junho de 2014

## **Agradecimentos**

*Agradeço primeiramente a Deus, sem o qual nada seria possível.*

*Agradeço a minha mãe em especial e a toda minha família que sempre me apoiaram e me deram o suporte necessário.*

*Ao professor José Alexander Araújo, pela dedicação, pelas críticas construtivas, pela contribuição na minha formação acadêmica e profissional e pelo incentivo ao longo desses últimos anos.*

*Agradeço a minha grande companheira Nayara Santos da Fonseca que sempre me apoiou e esteve ao meu lado.*

*Aos colegas de laboratório com quem trabalhei e sempre contribuíram de forma construtiva para minha formação, Estarle Roberto e Italo Affonso.*

*Raphael Araújo Cardoso*

---

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar e avaliar modelos para a previsão do comprimento de trincas que param de crescer sob condições de *fretting*. Os modelos em questão são baseados em (i) o cálculo do fator intensidade de tensão modo I, para trincas normais a superfície, ou um fator intensidade de tensão efetivo para trinca inclinadas e (ii) uma posterior comparação com dois formalismos para limiar de propagação para trincas curtas, a curva de El-Haddad e o diagrama de Kitagawa-Takahashi. Para validação das metodologias, os resultados foram comparados com dados da literatura. Em todos os ensaios foram utilizados contatos cilíndricos em regime de escorregamento parcial, sem a presença de carga remota. Os corpos de provas dos testes foram de Aço AISI 1034 e as sapatas cilíndricas de 52100. Como será mostrado, o diagrama Kitagawa-Takahashi forneceu melhores resultados em relação à curva de El-Haddad e neste caso boas estimativas foram observadas, porém, verificou-se que os modelos são sistematicamente conservadores quando consideráveis deformações plásticas estão presentes.

---

## ABSTRACT

The aim of this work is to study and evaluate models to estimate the size of short arrested cracks subjected to loads under *fretting* conditions. The models are based on (i) the calculation of the mode I stress intensity factor, for cracks normal to the free surface, or an effective stress intensity factor in case of slanted cracks and on (ii) a further comparison with two threshold formalisms for short crack propagation, namely the El-Haddad's curve and the Kitagawa-Takahashi diagram. For the evaluation of the methods, the results were compared with available data. In all experiments cylindrical contacts in partial slip regime were used, without the presence of remote load. The specimens of the test were from AISI 1034 Steel and the cylindrical pads from 52100. As will be shown, the Kitagawa-Takahashi diagram provided better results compared to the El-Haddad's curve and in this case good agreement with experimental data were provided, however, it was observed that both models are systematically conservatives when considerable plastic deformation are present.

# SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO .....	1
1.2 OBJETIVO .....	3
<b>2 MECÂNICA DO CONTATO .....</b>	<b>4</b>
2.1 TEORIA DO CONTATO .....	4
2.2 FORMULAÇÃO ANALÍTICA DE PROBLEMAS PLANOS .....	6
2.3 POTENCIAL DE MUSKHELISHVILI .....	7
2.4 TEORIA DO CONTATO DE HERTZ .....	8
2.4.1 CARGA NORMAL .....	8
2.4.2 CARGA TANGENCIAL .....	9
2.4.3 CAMPO DE TENSÃO CÍCLICO NO INTERIOR DA REGIÃO DO CONTATO .....	13
<b>3 MECÂNICA DA FRATURA .....</b>	<b>14</b>
3.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS .....	14
3.1.1 TENSÕES NAS VIZINHANÇAS DA TRINCA .....	14
3.1.2 PROPAGAÇÃO DE TRINCAS .....	16
3.1.3 TRINCAS CURTAS .....	17
3.2 CÁLCULO DO FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO EM PROBLEMAS DE FRETTING .....	17
3.3 METODOLOGIAS PARA PARADA DO CRESCIMENTO DE TRINCAS CURTAS .....	21
3.3.1 MODELO DE ARAÚJO E NOWELL (1999) .....	22
3.3.2 MODELO DINI ET AL., (2006) .....	24
3.3.3 MODELO PROPOSTO NO PRESENTE TRABALHO .....	24
<b>5 RESULTADOS .....</b>	<b>26</b>
5.1 CONDIÇÕES EXPERIMENTAIS .....	26
5.2 ESTIMATIVA DO COMPRIMENTO DE TRINCAS QUE PARAM DE CRESCER .....	27
5.1.1 CONDIÇÃO DE CARGA $P=227$ N/mm .....	31
5.1.2 CONDIÇÃO DE CARGA $P=540$ N/mm .....	32
5.1.3 MODELOS PARA PROPAGAÇÃO DE TRINCAS CURTAS .....	33
<b>6 CONCLUSÃO .....</b>	<b>34</b>
6.1 CONCLUSÕES .....	34
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS .....</b>	<b>35</b>
<b>ANEXOS .....</b>	<b>37</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1-Configurações ilustrando situações típicas onde ocorrem fadiga por <i>fretting</i> : (a) Conexão tipo rabo de andorinha e (b) Junta parafusada .....	1
Figura 2- Caracterização de contatos: (a) Incompleto e não-conforme; (b) Completo; (c) Incompleto com singularidade; (d) Incompleto e conforme. ....	4
Figura 3- Contato normal entre corpos elasticamente similares.....	5
Figura 4- Zona de adesão e escorregamento .....	6
Figura 5- Contato entre corpos elasticamente similares.....	6
Figura 6 - Semi-plano submetido a uma distribuição de tensão arbitrária.....	7
Figura 7- Contato entre dois corpos elasticamente similares, submetidos a uma força normal $P$ , e uma carga tangencial $Q$ . ....	9
Figura 8- Regiões de escorregamento e de adesão para o contato entre cilindros em regime de escorregamento parcial.....	9
Figura 9- Perfil de distribuição de tensões normais e cisalhantes para uma configuração de carregamento com $Q/P=0.59$ .....	10
Figura 10- Variação da carga $Q$ com o tempo .....	11
Figura 11- Variação das tensões cisalhantes na superfície do contato em diferentes instantes de tempo para um carregamento $Q$ cíclico.....	12
Figura 12- Modos de propagação de trincas .....	14
Figura 13- Trinca em um plano infinito sujeito a tensão normal .....	15
Figura 14- Zona plástica e de dominância de $K$ na ponta da trinca .....	15
Figura 15- Taxa de crescimento da trinca em função de $\Delta K$ .....	16
Figura 16- Princípio de Bueckner: (a) Corpo sem a trinca sujeito a cargas de contato; (b) corpo trincado na ausência de cargas externas, mas com as tensões ao longo da trinca iguais e postas as tensões do problema (a). ....	18
Figura 17- Princípio de Bueckner: (a) Corpo sem a trinca sujeito a cargas externas, (b) corpo trincado na ausência de cargas externas, mas com tensões ao longo da linha da trinca iguais em módulo, mas opostas as do problema (a) .....	19
Figura 18- Efeito do tamanho da trinca (a) tensão limiar e (b) no fator intensidade de tensão para uma grande variedade de ligas de engenharia (Kitagawa-Takahashi, 1976). ....	21
Figura 19- Metodologia proposta por Araújo e Nowell (1999) .....	23
Figura 20- Metodologia proposta por Dini el Al., (2006).....	24
Figura 21- Representação esquemática da metodologia aplicada para estimar o comprimento de trincas. ....	25
Figura 22- Modelo esquemático de um ensaio de <i>fretting</i> , modificado (Fouvry, 2007).....	26
Figura 23- Caminho da trinca experimental observado através de fotografia, Fouvry (2007)	27
Figura 24- Estimativa para carga $P=227$ N/mm.....	30
Figura 25- Estimativa para carga $P=540$ N/mm.....	30
Figura 26- Efeito do ângulo da trinca no cálculo de $\Delta K$ .....	31
Figura 27- Fatores intensidade de tensão calculados para os comprimentos de trincas experimentais .....	32
Figura 28- Erros associados ao grau de plasticidade na região de propagação da trinca, $\theta=0^\circ$	32
Figura 29- Limiares de propagação para trincas curtas e longas .....	33

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Tensões superficiais cisalhantes para cada região durante a variação do carregamento tangencial com o tempo. ....	12
Tabela 2- Propriedades mecânicas dos materiais; $E$ : módulo de elasticidade; $\nu$ : razão de Poisson; $\sigma_Y$ : tensão de escoamento; $\sigma_{UTS}$ : tensão última; $\sigma_f$ : limite de resistência a fadiga; $\Delta K_0$ : limiar de propagação para trincas longas. ....	27
Tabela 3- Parâmetros de parada de trinca em experimentos de <i>fretting</i> ( $f = 0.9$ , $10^6$ Ciclos), $\theta=0^\circ$ , $P=227$ N/mm; .....	28
Tabela 4- Parâmetros de parada de trinca em experimentos de <i>fretting</i> ( $f = 0.9$ , $10^6$ Ciclos), $\theta=0^\circ$ , $P=540$ N/mm; .....	28
Tabela 5- Parâmetros de parada de trinca em experimentos de <i>fretting</i> ( $f = 0.9$ , $10^6$ Ciclos), $\theta=30^\circ$ , $P=227$ N/mm; .....	29
Tabela 6- Parâmetros de parada de trinca em experimentos de <i>fretting</i> ( $f = 0.9$ , $10^6$ Ciclos), $\theta=30^\circ$ , $P=540$ N/mm; .....	29

# LISTA DE SÍMBOLOS

## Símbolos Latinos

$A$	Complacência composta	[MPa <sup>-1</sup> ]
$a$	Semi-largura do contato	[mm]
$B_x$	Densidade de deslocamentos na direção x	
$B_y$	Densidade de deslocamentos na direção y	
$b_x$	Deslocamento de uma descontinuidade na direção x	
$b_y$	Deslocamento de uma descontinuidade na direção y	
$b$	Tamanho da trinca	[m]
$b_0$	Tamanho crítico ou intrínseco da trinca	[m]
$c$	Semi-largura da zona de adesão nos instantes de carga máxima e mínima	[mm]
$c'$	Semi-largura da zona de adesão durante o carregamento reverso	[mm]
$E$	Módulo de elasticidade	[MPa]
$E^*$	Módulo de elasticidade equivalente	[MPa]
$e$	Ponto de colocação de descontinuidade	
$F$	Fator geométrico	
$f$	Coefficiente de atrito	
$G$	Kernel de uma descontinuidade	
$F_n$	Carga normal	[N]
$F_t$	Carga tangencial	[N]
$g(x)$	Deslocamento relativo em x	
$h(x)$	Interpenetração entre dois corpos	
$i$	Unidade imaginária	
$K$	Fator intensidade de tensão	[MPa√m]
$K_I$	Fator intensidade modo I	[MPa√m]
$K_{II}$	Fator intensidade modo II	[MPa√m]
$K_{eff}$	Fator intensidade modo efetivo	[MPa√m]
$k$	Constante de Kolosov	
$L$	Espessura do corpo de prova	[mm]
$N$	Numero de ciclos de fadiga	
$P$	Carga normal por unidade de comprimento	[N/mm]
$p_0$	Pressão de pico	[MPa]
$p(x)$	Distribuição de pressão no contato	
$Q$	Carga tangencial por unidade de comprimento	[N/mm]
$Q_{max}$	Carga tangencial máxima por unidade de comprimento	[N/mm]
$Q_{min}$	Carga tangencial mínima por unidade de comprimento	[N/mm]
$q(x)$	Distribuição de tensão cisalhante superficial	
$q'(x)$	Perturbação na distribuição de tensão cisalhante superficial	
$q''(x)$	Termo de correção para a distribuição de tensão cisalhante superficial	
$R$	Raio da sapata cilíndrica	[mm]
$R^*$	Raio equivalente	[mm]
$x, y, z$	Coordenadas do eixo cartesiano	

## Símbolos Gregos



$\Delta\sigma_{fl}$	Faixa limite de resistência a fadiga	[MPa]
$\Delta K_{th}$	Limiar para o fator intensidade de tensão	[MPa $\sqrt{m}$ ]
$\Delta K_0$	Limiar para o fator intensidade de tensão em trincas longas	[MPa $\sqrt{m}$ ]
$\theta$	Ângulo em coordenadas polares	[rad]
$\mu$	Módulo de rigidez	[MPa]
$\nu$	Coefficiente de Poisson	
$\xi$	Variável de integração	
$\sigma$	Tensões normais	
$\sigma_N$	Tensões normais geradas pelas descontinuidades	
$\tau_T$	Tensões cisalhantes geradas pelas descontinuidades	
$\sigma_{UTS}$	Tensão última	[MPa]
$\sigma_Y$	Tensão de escoamento	[MPa]
$\tau$	Tensões cisalhantes	
$\Phi$	Função potencial de Muskhelishvili	
$\Phi'$	Derivada da função potencial de Muskhelishvili	
$\phi$	Função desconhecida.	

## Subscritos

$1,2$  Índices referentes aos corpos 1 e 2

$max$  Máximo

$min$  Mínimo

$xx,yy,xy$  Componentes que indicam plano normal e sentido da componente de tensão.

## Sobrescritos

n Componente normal

t Componente tangencial

- Conjugado

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

O termo *fretting* refere-se a um pequeno deslocamento tangencial que pode ocorrer entre duas superfícies em contato. O movimento tangencial pode surgir oriundo de vibrações devido fontes externas ou da presença de cargas cíclicas tangenciais atuando em um dos corpos, que por sua vez gera um aumento da rugosidade das superfícies, tornando suscetível a nucleação de trincas. Essas trincas são concentradores de tensão e, em presença de cargas externas de fadiga, podem levar a uma falha prematura do componente. Esse fenômeno é conhecido como fadiga por *fretting*.

Falhas oriundas do processo de fadiga por *fretting* vêm se mostrando um desafio cada vez maior em projetos de engenharia, com foco maior na indústria aeronáutica. Exemplos clássicos desse tipo de falha são observados nas conexões do tipo rabo de andorinha entre as pás e o rotor do fan de motores a jato e em juntas rebitadas ou parafusadas da fuselagem de aeronaves como mostrados na Fig. 1.

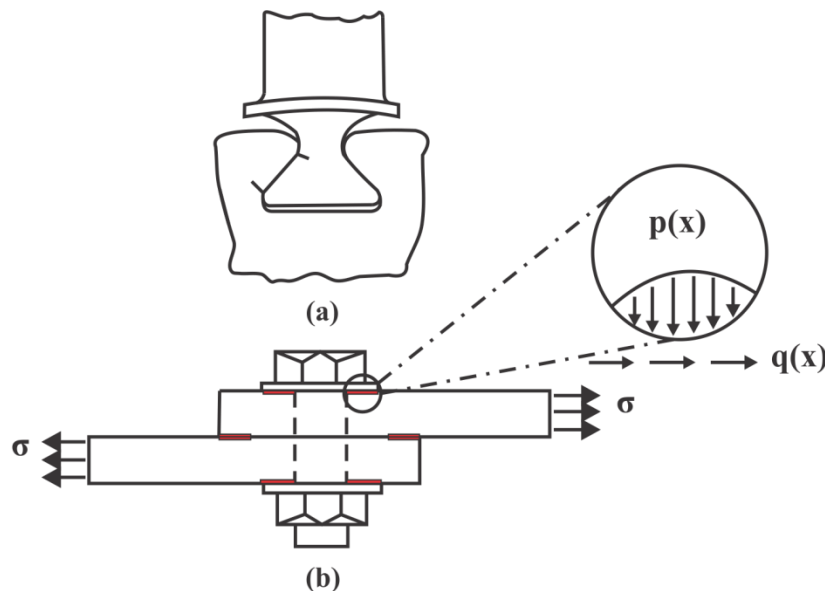


Figura 1-Configurações ilustrando situações típicas onde ocorrem fadiga por *fretting*: (a) Conexão tipo rabo de andorinha e (b) Junta parafusada

Nesse contexto, nota-se que entender o processo de fadiga por *fretting* é fundamental para prevenção e redução de acidentes, porém ainda hoje os efeitos que influenciam esse fenômeno não são completamente conhecidos.

Os primeiros relatos de falha por *fretting* ocorreram no início do século XX, por meio da observação de trincas na região de contato entre o corpo de prova e as garras de uma máquina de fadiga (Eden et al., 1911). Na época, o fenômeno foi identificado como um dano superficial, o que hoje é descrito como desgaste por *fretting*. Warlow-Davis (1941) relatou que os componentes que eram submetidos a condições de *fretting* e depois a carregamentos cíclicos apresentavam uma redução

de 12 a 17% de sua resistência a fadiga. Experimentos mostraram ainda que a fadiga por *fretting* pode causar uma redução de até 90 % no limite de resistência à fadiga de um material metálico (McDowell, 1953). Segundo Thomson (1998), a fadiga por *fretting* causa cerca de 17% das falhas ou contratempos nos sistemas de propulsão aeronáuticos.

Fatores que influenciam a resistência à fadiga por *fretting*, como pressão no contato, a amplitude de escorregamento relativo, condições ambientais e materiais não tinham sido avaliados completamente até meados dos anos 60. Entretanto, Nishioka e Hirakawa (1969,1972), que examinaram a influências desses fatores independentemente, constataram que havia uma faixa de deslocamentos tangenciais que acelerava a fadiga por *fretting*.

Posteriormente, Bramhall (1973) estudou a influência do tamanho do contato na vida em fadiga, após a realização de sucessivos ensaios onde se mantinha o estado de tensão superficial constante, mas variava-se o tamanho do contato. Dessa forma concluiu-se que contatos inferiores a um tamanho crítico apresentavam vida infinita ( $>10^7$  ciclos), enquanto que para contatos maiores a falha ocorria. Nowell (1988) e Araújo (2000) confirmaram a ocorrência desse efeito.

Pode-se classificar as abordagens para estimativa de vida à fadiga sob condições de *fretting* em três grupos (Ciavarella e Demilio, 2001):

- i) Abordagem de microdeslizamentos;
- ii) Abordagem baseada em mecânica da fratura;
- iii) Analogia com fadiga em entalhes;

Esta última propõe que o problema de *fretting* é equivalente a um problema de fadiga convencional devido a um concentrador de tensões. Essa abordagem simplifica o problema, apesar de dar menos importância ao desgaste superficial. Giannakopoulos et al. (2000) observando semelhanças no campo de tensão no problema de contato entre uma sapata plana com cantos arredondados e um semi-plano com o de corpos entalhados sugeriram que essa característica poderia ser usada para fazer previsão de vida em fadiga por *fretting*.

Em análises mais convencionais, tem-se a teoria da distância crítica, que propõe que a propagação de trincas pode ser evitada desde que haja uma rápida redução dos níveis de tensão à medida que se adentra o componente (Susmel, 2009). Portanto altos níveis de tensão nas proximidades do contato que ocorrem no problema de *fretting* podem não ser representativos para a determinação da vida do componente desde que esse severo campo de tensão caia rapidamente.

No entanto, apesar dos avanços acerca do assunto e da utilização de modelos numéricos e analíticos para prever parâmetros de fadiga, muitos problemas, principalmente no campo industrial permanecem desconhecidos, o que leva a se adotar medidas paliativas (Beard, 2004). O objetivo maior ao se realizar pesquisas na área de fadiga por *fretting*, sob dadas condições de contato, carregamentos

e de um conjunto de parâmetros materiais é transportar esses conhecimentos e resultados para condições mais complexas e de cunho industrial.

## **1.2 OBJETIVO**

O objetivo deste trabalho é prever o comprimento final de trincas que param de crescer em carregamentos de *fretting*, para tal, será utilizado um modelo elástico analítico para cálculo do fator intensidade de tensão para posterior comparação com dois limiares de propagação de trincas curtas: Diagrama Kitagawa-Takahashi e a curva de El-Haddad. Depois será feita uma avaliação das metodologias fazendo-se o uso de dados experimentais presentes na literatura. Estimativas de comprimento serão realizadas considerando-se tanto a propagação de trincas perpendiculares à superfície de contato quanto considerando a propagação de trincas inclinadas.

## 2 MECÂNICA DO CONTATO

### 2.1 TEORIA DO CONTATO

Em geral problemas reais de *fretting* envolvem contato entre componentes de grande complexidade, que associam complexas geometrias e histórico de carregamentos. Nesses casos a modelagem do problema é complicada e se faz o uso de métodos, sendo o principal deles o método dos elementos finitos.

Sendo assim no estudo do problema de fadiga por *fretting*, costuma-se utilizar testes experimentais que empreguem geometrias idealizadas e bem definidas de forma que a natureza do contato, bem como as tensões e deformações induzidas pelo contato, sejam bem definidas, de fácil controle, possuam repetibilidade e baixa sensibilidade às imperfeições de fabricação (Nowell, 1994).

Neste capítulo será estudada uma configuração clássica do problema de *fretting*, contato entre cilindros, configuração esta que possui uma solução analítica muito bem definida para determinadas condições de carregamento (Nowell, 1994), e uma gama de resultados experimentais presentes na literatura.

O primeiro passo na análise de contatos mecânicos é a caracterização do contato. Na Fig. 2 é apresentada a classificação do contato segundo sua natureza.

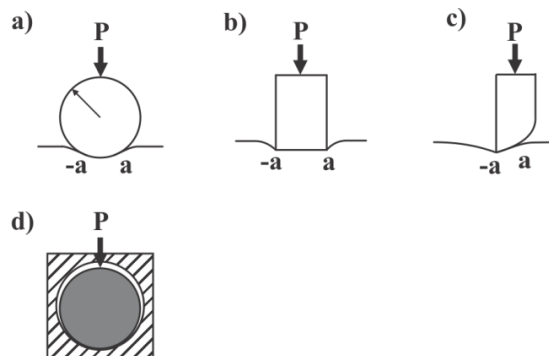


Figura 2- Caracterização de contatos: (a) Incompleto e não-conforme; (b) Completo; (c) Incompleto com singularidade; (d) Incompleto e conforme.

A Figura 2 (a) ilustra um cilindro pressionado contra um semi-plano, formando um contato do tipo incompleto, uma vez que a extensão do contato depende da carga normal aplicada, e não conforme já que para valores pequenos de  $P$  a semi-largura do contato “ $a$ ” é muito inferior ao raio do cilindro,  $R$ . Isso implica que, quando  $a \ll R$ , a deformação do cilindro será restrita a um pequeno segmento de arco e, portanto o cilindro pode ser aproximado com um semi-plano. Nesse tipo de contato a pressão nas extremidades do contato é nula. Em caso de contatos completos Fig. 2 (b), o tamanho do contato não é influenciado pela carga  $P$  aplicada. A distribuição de pressão ao longo do contato apresenta singularidades nas extremidades do contato, onde a pressão assume valores muito

altos. A distribuição de tensões nesse tipo de contato é modificada de forma brusca por falhas geométricas. No caso de contato incompleto e com singularidade Fig. 2 (c), o tamanho do contato depende da carga  $P$  aplicada, tem distribuição de pressão singular em uma das extremidades e uma distribuição que cai continuamente até zero na outra.

Para o caso da Fig. 2 (d) há conformabilidade do contato, nesse caso, ao contrário do que ocorre na Fig. 2 (a), o semi-tamanho do contato passa a não ser muito menor que o raio do cilindro, tornando inviável a aproximação dos corpos em um semi-pano.

Supondo agora o contato normal entre dois corpos similares (mesmo módulo de elasticidade,  $E$ ), conforme mostrado na Fig. 3. Quando uma pressão de contato é exercida, as partículas na superfície de cada um dos corpos além de serem comprimidas sofrem um deslocamento paralelo. No entanto, como os corpos são elasticamente similares, as partículas correspondentes dos corpos sofrerão o mesmo deslocamento relativo, ou seja, mesmo que haja um coeficiente de atrito diferente de zero entre as superfícies, não haverá tensões de fricção.

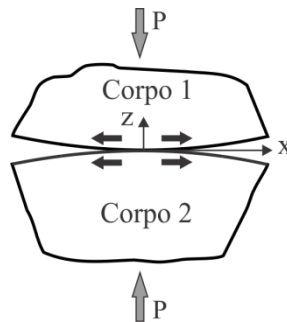


Figura 3-Contato normal entre corpos elasticamente similares

Considerando agora a aplicação de uma força tangencial suficientemente grande para causar escorregamento entre os corpos em contato. Nesse caso irão surgir tensões de cisalhamento que são limitadas em toda a extensão do contato, pelo coeficiente de fricção  $f$ , ou seja:

$$|q(x,y)| = -fp(x,y) \quad (2.1)$$

onde  $q(x,y)$  e  $p(x,y)$  são as distribuições de tensão cisalhante e de pressão ao longo do contato, respectivamente. A presença das tensões cisalhantes provocará um deslocamento normal nos pontos correspondentes dos corpos em contato. No entanto, como as tensões cisalhantes atuam em direções opostas e os corpos são elasticamente similares, o deslocamento normal dos pontos correspondentes nas superfícies dos dois corpos é o mesmo, fazendo com que a pressão contato permaneça inalterada. Em geral, na região do contato, assume-se que a força de cisalhamento aplicada é suficientemente pequena para não causar deslizamento total, ou seja:

$$|Q| < fP \quad (2.2)$$

onde  $Q$  é a carga tangencial de contato e  $P$  a carga normal. Isso resulta no aparecimento de duas zonas distintas, uma de aderência e outra de escorregamento, ilustradas na Fig. 4. A existência da zona de

adesão é de fácil compreensão, uma vez que as forças tangenciais não são suficientes para causar escorregamento. No caso da zona de escorregamento, à medida que se afasta do centro do contato a tensão normal tende a zero e, portanto seria necessário um coeficiente de atrito infinito para prevenir o escorregamento. Sendo assim, na zona de escorregamento, as tensões cisalhantes são iguais em magnitude ao limite onde há escorregamento Eq. (2.1). Já para a zona de adesão:

$$|q(x, y)| < fp(x, y) \quad (2.3)$$

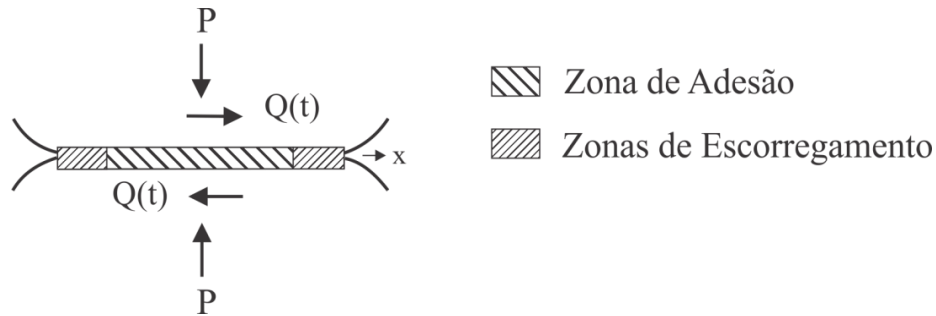


Figura 4-Zona de adesão e escorregamento

Como as tensões cisalhantes nos corpos são iguais em módulo, porém com sentido contrário, os deslocamentos normais induzidos serão os mesmos. Portanto a distribuição de pressão continua sem ser afetado pelas tensões cisalhantes, o que torna o problema desacoplado.

## 2.2 FORMULAÇÃO ANALÍTICA DE PROBLEMAS PLANOS

Para se obter o campo de tensão sub-superficial é preciso determinar o campo de tensões cisalhantes e a distribuição de pressão ao longo do contato. Para isso é preciso resolver as equações integrais que relacionam a distribuição de pressão  $p(x)$  com o deslocamento normal  $h(x)$  conforme ilustrado no Fig. 5, e a distribuição das tensões cisalhantes com o deslocamento tangencial relativo  $g(x)$ . Detalhes referentes ao desenvolvimento dessas equações podem ser encontrados em Hills e Nowell (1994).

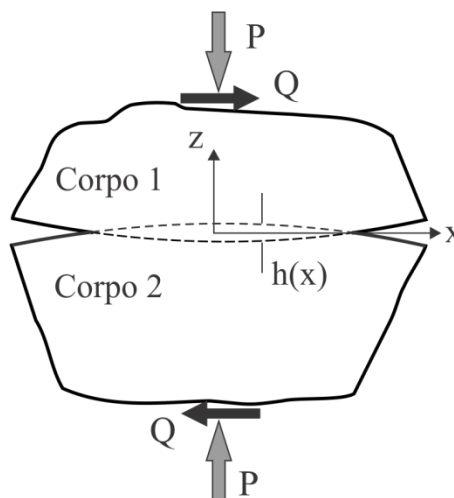


Figura 5-Contato entre corpos elasticamente similares

Quando os dois corpos são elasticamente similares a solução pode ser obtida pela integração ao longo de todo o contato das Equações integrais (2.4) e (2.5):

$$\frac{1}{A} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int \frac{p(\xi)}{x - \xi} d\xi \quad (2.4)$$

e,

$$\frac{1}{A} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int \frac{q(\xi)}{x - \xi} d\xi \quad (2.5)$$

onde A é a flexibilidade composta que é definida como:

$$A = 2 \left( \frac{k + 1}{4\mu} \right) \quad (2.6)$$

Sendo  $k = 3 - 4\nu$ , no estado plano de deformação,  $\nu$  a razão de Poisson e  $\mu$  é o módulo de rigidez.

## 2.3 POTENCIAL DE MUSKHELISHVILI

Em *fretting* é importante compreender o campo de tensão sob a superfície, e como esse se comporta a medida que se adentra no material. Uma das formas de se calcular esse campo de tensões é utilizando a formulação potencial de Muskhelishvili (1953), Hills, Nowell e Sackfield (1993).

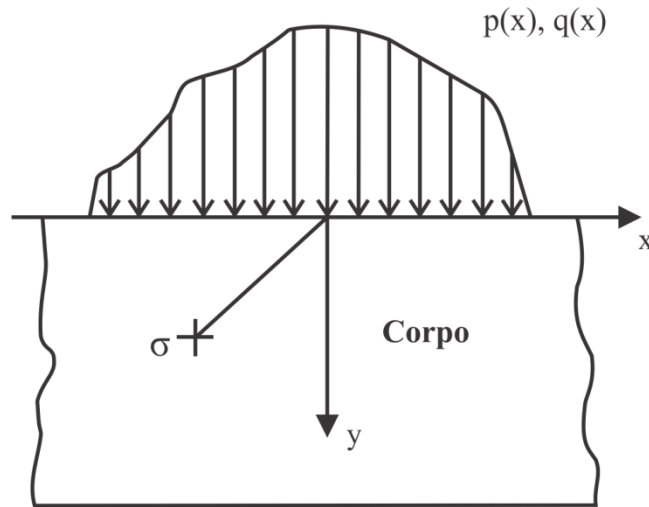


Figura 6 - Semi-plano submetido a uma distribuição de tensão arbitrária

Nesta formulação, a coordenada das posições é dada na forma complexa  $x+yi$ , o potencial pode ser escrito como mostrado na Eq. (2.7):

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{p(t) - iq(t)}{t - z} dt \quad (2.7)$$



Onde  $p(t)$  e  $q(t)$ , são distribuições de tensões normais e cisalhantes arbitrárias. Em condições de escorregamento essas distribuições são relacionadas pela Eq. (2.1). Assim a Eq. (2.7) pode ser escrita como:

$$\Phi(z) = \frac{1-if}{2\pi i} \int \frac{p(t)}{t-z} dt \quad (2.8)$$

Uma vez determinado o potencial as componentes de tensão podem ser relacionadas nas seguintes equações:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2(\Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z})) \quad (2.9)$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2\tau_{xy} = 2((\bar{z} - z)\Phi'(z) + \bar{\Phi}(z) - \Phi(z)) \quad (2.10)$$

Onde  $\Phi'(z)$  é a derivada da função potencial em relação  $z$ ,  $\bar{\Phi}(z)$  o conjugado da função potencial e  $\bar{\Phi}(\bar{z})$  é o conjugado da função potencial aplicado a conjugado de  $z$ .

## 2.4 TEORIA DO CONTATO DE HERTZ

### 2.4.1 CARGA NORMAL

A configuração de interesse neste trabalho, que é comumente aplicada por outros pesquisadores (Nowell, 1988, Araújo, 2000) é mostrada na Fig. 7. O raio da sapata,  $R$ , e o carregamento normal por unidade de comprimento,  $P$ , foram definidos considerando cada corpo como um semi-plano elástico e a solução para a distribuição de pressão foi a solução de Hertz. Os resultados de Hertz (1882) preveem que devido à força normal estática, uma distribuição de pressão elíptica é desenvolvida:

$$p(x) = -p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \quad (2.11)$$

onde  $p_0$  é o valor máximo da pressão no contato, obtida a partir da condição de equilíbrio.

$$p_0 = \frac{2P}{\pi a} \quad (2.12)$$

e  $a$  é a metade do tamanho do contato

$$a = \sqrt{\frac{4PR}{\pi E^*}} \quad (2.13)$$

$R^*$ , o raio equivalente é dado por:

$$R^* = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} \quad (2.14)$$

e finalmente

$$E^* = \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)^{-1} \quad (2.15)$$

os subscritos 1 e 2 referem-se aos corpos 1 e 2 respectivamente,”  $E$ ” é o módulo de elasticidade, e  $\nu$  é a razão de poisson.

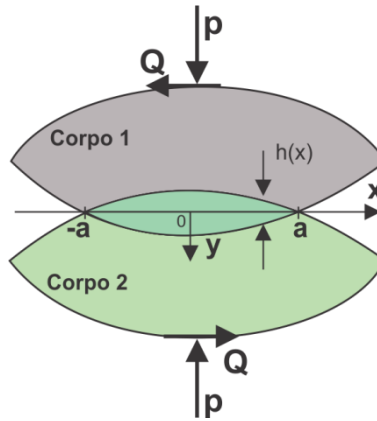


Figura 7- Contato entre dois corpos elasticamente similares, submetidos a uma força normal P, e uma carga tangencial Q.

## 2.4.2 CARGA TANGENCIAL

Por outro lado, a carga tangencial dá origem às tensões cisalhantes. Em fadiga por *fretting* o carregamento cisalhante aplicado geralmente é menor que o limite para escorregamento total. Então, como descrito anteriormente, um regime de escorregamento parcial é desenvolvido, onde ocorre escorregamento em duas regiões simétricas  $c < |x| \leq a$  que circundam uma região central de adesão  $|x| \leq c$ , Fig. 8.

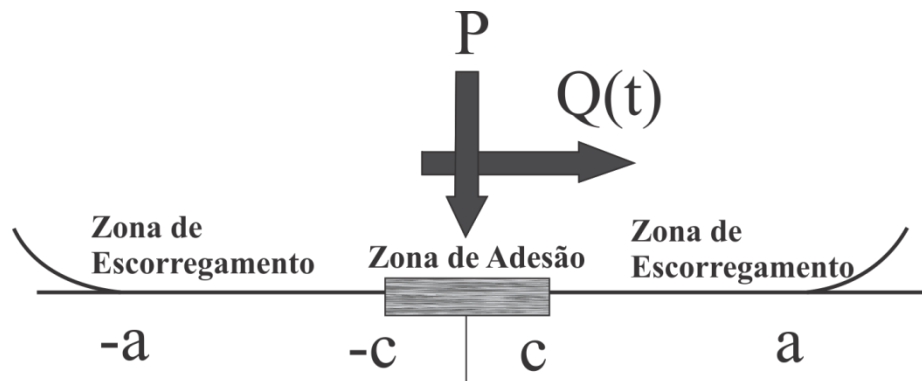


Figura 8- Regiões de escorregamento e de adesão para o contato entre cilindros em regime de escorregamento parcial.

É conveniente modelar as tensões cisalhantes superficiais como uma perturbação da solução de escorregamento total:

$$q(x) = fp_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} - q'(x) \quad (2.16)$$

onde  $f$  é o coeficiente de atrito.

Na zona de adesão, pode-se obter  $q'(x)$  resolvendo-se a equação integral 2.5 (Hills et al, 1993), levando-se em conta o fato de não haver movimento relativo na direção  $x$  entre os pontos correspondentes da região de adesão ( $g(x) = 0, |x| \leq c$ ).

$$q'(x) = fp_0 \frac{c}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{c}\right)^2} \quad |x| \leq c \quad (2.17)$$

Na zona de escorregamento ( $c < |x| \leq a$ ) não há perturbação da solução completa, assim:

$$q'(x) = 0 \quad c < |x| \leq a \quad (2.18)$$

O tamanho da zona de adesão,  $c$ , é encontrado considerando-se equilíbrio tangencial.

$$\frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{Q}{fP}\right)} \quad (2.19)$$

A Fig. 9 ilustra essa solução para uma condição típica de carregamento, onde a razão  $p(x)/p_0$  é descontada da perturbação  $q'(x)/fp_0$

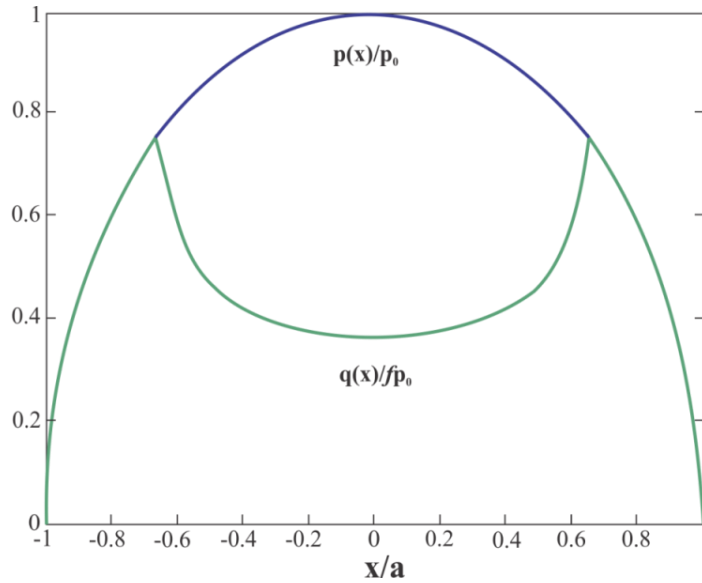


Figura 9- Perfil de distribuição de tensões normais e cisalhantes para uma configuração de carregamento com  $Q/P=0.59$

As expressões desenvolvidas até agora para a distribuição de tensão cisalhante na superfície são válidas apenas quando a força tangencial está em seu valor máximo em um ciclo de carregamento. Para analisar as tensões superficiais ao longo do tempo é necessário avaliar o que ocorre no carregamento reverso, Hills et al. (1993).

Para essa análise é importante recordar que as condições de contorno na zona de escorregamento e na zona de adesão, que são descritas pelas Eq. (2.1) e Eq. (2.3). Além disso, as tensões cisalhantes sempre apontam na direção oposta ao movimento da sapata:

$$\text{sgn}(q(x)) = -\text{sgn}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) \quad (2.20)$$

Para compreender melhor o fenômeno de escorregamento reverso assumiremos um carregamento tangencial com comportamento senoidal ao longo do tempo descrito pela Fig. 10. Durante a primeira fase do carregamento, ou seja, quando a tensão cisalhante atinge o valor máximo (ponto A, Fig. 10), as equações 2.16 a 2.18 descrevem a variação de  $q(x)$ .

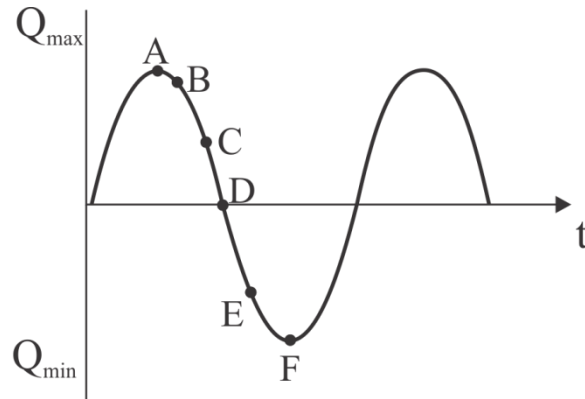


Figura 10- Variação da carga Q com o tempo

Durante o descarregamento do ponto A para o ponto B, o deslocamento relativo muda de sinal provocando uma violação da Eq. (2.20) e há adesão em todo o contato.

Prosseguindo com o descarregamento até o ponto C, verifica-se escorregamento reverso nas extremidades do contato. Nessa nova zona de escorregamento formada ( $c' < x \leq a$ ), as tensões cisalhantes superficiais terão mudado de direção, ou seja, passarão de  $fp(x)\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$  para  $-fp(x)\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$ . Dessa forma, por analogia, podemos concluir que a tensão necessária para provocar escorregamento na superfície será dada por:

$$q''(x) = 2fp_0 \frac{c'}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{c'}\right)^2} \quad (2.21)$$

O fator 2, que aparece na Eq. (2.21), deve cancelar o movimento relativo quando as tensões superficiais na zona de escorregamento mudam de  $fp(x)$  para menos  $-fp(x)$ . A Tab. 1 a seguir apresenta as distribuições de tensões cisalhantes superficiais para cada região na fase de descarregamento.

Tabela 1- Tensões superficiais cisalhantes para cada região durante a variação do carregamento tangencial com o tempo.

$q(x)/fp_0$	Zona de Aplicação
$-\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$	$c' <  x  \leq a$
$-\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} + 2\frac{c'}{a}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{c'}\right)^2}$	$c <  x  \leq c'$
$-\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} + 2\frac{c'}{a}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{c'}\right)^2} - \frac{c}{a}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{c}\right)^2}$	$ x  < c$

O tamanho da nova zona de adesão em escorregamento reverso pode ser calculado utilizando-se a equação de equilíbrio:

$$\frac{c'}{a} = \sqrt{1 - \left| \frac{Q_{max} - Q}{2fP} \right|} \quad (2.22)$$

A Fig. 11 mostra a variação das tensões cisalhantes ao longo da superfície para diferentes valores de  $Q$ , correspondentes aos pontos A, C, D, E e F de um ciclo de *fretting* mostrado na Fig. 10. Nota-se que para as cargas cisalhantes máximas,  $Q_{max}$  e  $Q_{min}$ , as distribuições de tensões cisalhantes são iguais em módulo, mas com sinais opostos. Nota-se também, que após remoção total da carga  $Q$ , ponto D, a tensão cisalhante não é nula, mas está em equilíbrio, o que significa que a distribuição de tensões cisalhantes ao longo do tempo é não linear. Portanto, tanto as tensões cisalhantes quanto as tensões e deformações dos corpos em contato dependem da história de carregamento. Desta forma, a aplicação do princípio da superposição tem de ser aplicado com cuidado em problemas de contato com atrito.

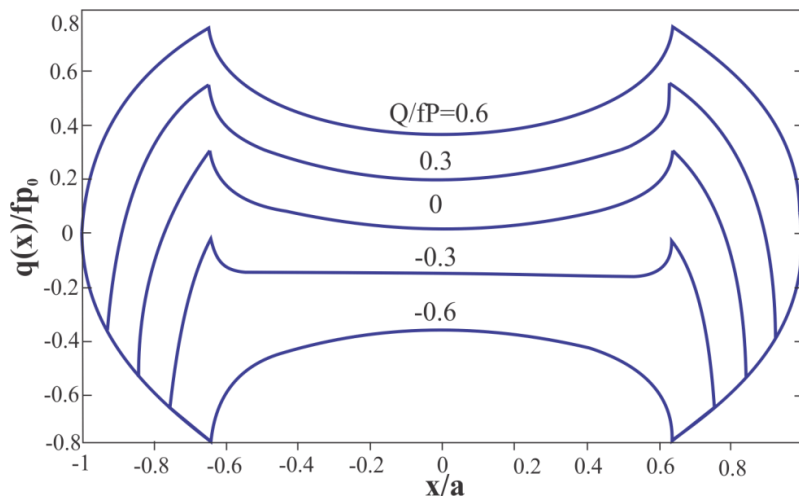


Figura 11- Variação das tensões cisalhantes na superfície do contato em diferentes instantes de tempo para um carregamento  $Q$  cíclico.

### 2.4.3 CAMPO DE TENSÃO CÍCLICO NO INTERIOR DA REGIÃO DO CONTATO

O campo de tensão sub-superficial resultante pode ser obtido pela superposição dos campos de tensões provocados por  $p(x)$  e  $q(x)$  em escorregamento total e pelas perturbações  $q'(x)$  e  $q''(x)$ . É importante notar que quatro combinações de superposição serão necessárias para descrever o campo de tensão, sendo que estas devem ser feitas nos estados de carga máxima, mínima, descarregamento e recarregamento. As componentes de tensão são descritas pelas equações abaixo:

Nas cargas máxima e mínima:

$$\frac{\sigma_{ij}}{p_0}(x, y) = \left( \frac{\sigma_{ij}^n\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right)}{p_0} \right) \pm f \left( \frac{\sigma_{ij}^t\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right)}{fp_0} \right) \mp f \frac{c}{a} \left( \frac{\sigma_{ij}^t\left(\frac{x}{c}, \frac{y}{c}\right)}{fp_0} \right) \quad (2.23)$$

onde a combinação de sinais  $++-$  são para carga máxima. Já nos casos de descarregamento e recarregamento têm-se:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{ij}}{p_0}(x, y) = & \left( \frac{\sigma_{ij}^n\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right)}{p_0} \right) \mp f \left( \frac{\sigma_{ij}^t\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right)}{fp_0} \right) \pm 2f \frac{c'}{a} \left( \frac{\sigma_{ij}^t\left(\frac{x}{c'}, \frac{y}{c'}\right)}{fp_0} \right) \\ & \mp f \frac{c}{a} \left( \frac{\sigma_{ij}^t\left(\frac{x}{c}, \frac{y}{c}\right)}{fp_0} \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde a combinação de sinais  $+-+-$  são para descarregamento. Os sobrescritos  $n$  e  $t$  referem-se às componentes de tensão produzidas pelos carregamentos normais e tangenciais, respectivamente.

Estas tensões podem ser obtidas na condição de estado plano de deformação usando-se os potenciais de Muskhelishvili, apresentados no capítulo 2.3.

## 3 MECÂNICA DA FRATURA

### 3.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Fratura devido a cargas cíclicas é conhecida como fadiga e esta é reconhecidamente a maior causa de falha de componentes mecânicos. O fenômeno de fratura por fadiga é convenientemente dividido em três etapas: (i) Iniciação de trincas; (ii) propagação da trincas, onde se avalia a trinca até um tamanho crítico suportado pelo componente; e (iii) a ruptura catastrófica do componente. A mecânica da fratura é a ciência que estuda as duas últimas etapas desse fenômeno.

#### 3.1.1 TENSÕES NAS VIZINHANÇAS DA TRINCA

Uma trinca em um sólido pode se propagar em diferentes modos, como ilustrado na Fig. 12. Os modos I, II e III são denominados de “modo de abertura”, “modo de cisalhamento” e “modo de rasgamento”, respectivamente.

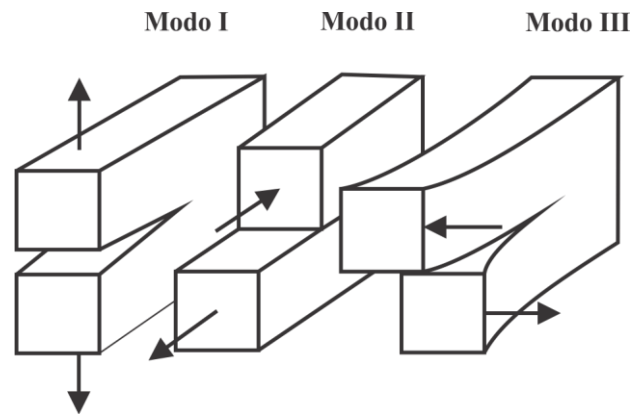


Figura 12- Modos de propagação de trincas

Considere uma trinca de comprimento  $2b$  em um plano infinito sujeita a uma tensão  $\sigma$  de abertura da trinca. Um elemento de área  $dxdy$ , a uma distância  $r$  da ponta da trinca e a um ângulo  $\theta$  em relação à trinca, Fig. 13, experimenta tensões normais  $\sigma_{xx}$  e  $\sigma_{yy}$  e uma tensão cisalhante  $\tau_{xy}$ . Fazendo-se uso da teoria da elasticidade pode se mostrar que estas tensões são dadas por:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{\sigma\sqrt{\pi b}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) + \dots \\ \sigma_{yy} &= \frac{\sigma\sqrt{\pi b}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) + \dots \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma\sqrt{\pi b}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + \dots\end{aligned}\tag{3.1}$$

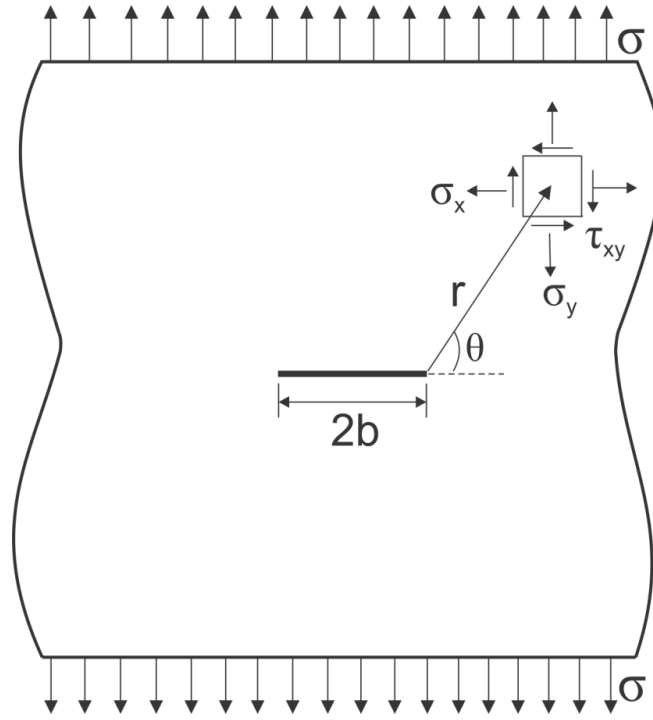


Figura 13- Trinca em um plano infinito sujeito a tensão normal

As Eq. (3.1) são os primeiros termos de uma expansão de séries, somente aplicáveis para  $r \ll b$ . Estas também evidenciam uma singularidade em  $r = 0$ . Na ponta da trinca,  $r \rightarrow 0$ , a tensão  $\sigma \rightarrow \infty$ . Em outros termos, a tensão nas proximidades da raiz da trinca é produto da posição geométrica  $(1/\sqrt{2\pi r})f(\theta)$  e de um fator  $\sigma\sqrt{\pi b}$  que é chamado de fator intensidade de tensão modo I,  $K_I$ . O fator intensidade de tensão determina a magnitude das tensões elásticas nas proximidades da ponta da trinca. Vale ressaltar que  $K$  foi obtido considerando (i) apenas o primeiro termo de uma série (para os termos subsequentes, a tensão é proporcional a potências de  $r$ ) e (ii) para uma análise linear elástica. Portanto, a aplicabilidade de  $K$  está restrita a regiões próximas da ponta da trinca onde  $r \ll b$  e a condições de escoamento de pequena escala, ou seja, a região plastificada da trinca deve ser muito menor que a região de dominância de  $K$ , Fig. 14.

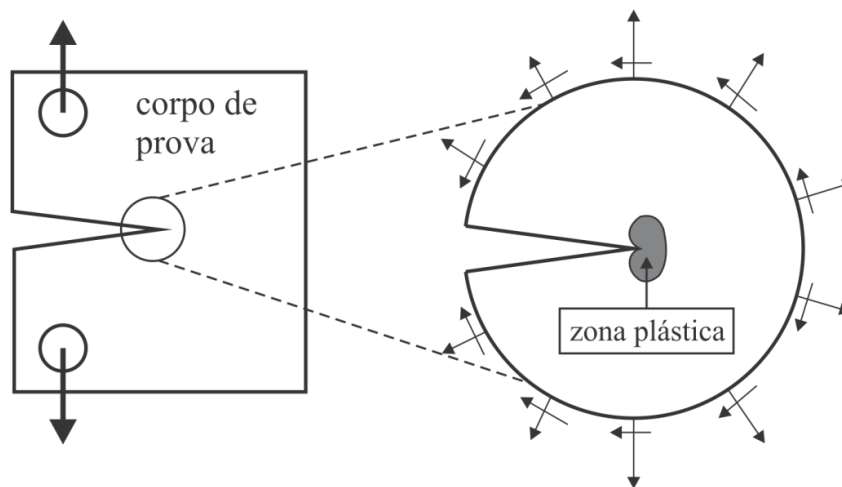


Figura 14- Zona plástica e de dominância de K na ponta da trinca



### 3.1.2 PROPAGAÇÃO DE TRINCAS

O fator de intensidade de tensão é uma medida dos campos de tensão e de deformação elástica nas proximidades da ponta da trinca, portanto é esperado que este controle a taxa de propagação da trinca dentro de uma escala de pequenas deformações plásticas. Paris et al., (1961) sugeriram que para uma variação cíclica do campo de tensão a taxa de propagação de trincas esta relacionada com a faixa do fator de intensidade de tensão,  $\Delta K$ .

$$\frac{db}{dN} = f(\Delta K) \quad (3.2)$$

onde  $db/dN$  é a taxa de crescimento da trinca,  $N$  é o numero de ciclos de fadiga. A figura 15 mostra um diagrama esquemático que revela a taxa de propagação da trinca contra a faixa do fator de intensidade de tensão  $\Delta K$  em escala logarítmica. Para valores de  $\Delta K$  inferiores a  $\Delta K_{th}$  a taxa de propagação da trinca é muito pequena, sendo esse denominado de limiar do fator de intensidade de tensão. No estágio 1, há uma forte variação na taxa de propagação da trinca com a variação de  $\Delta K$ . Já o estágio 2, parte aproximadamente linear do gráfico, pode ser descrito por:

$$\frac{db}{dN} = B(\Delta K)^m \quad (3.3)$$

em que  $B$  e  $m$  são constantes que dependem de propriedades materiais, temperatura e condições de carregamento. No estágio 3, a taxa de propagação da trinca já elevada apresenta uma zona plástica na ponta da trinca que começa a predominar nessa região levando o componente a falha com o incremento de  $\Delta K$ .

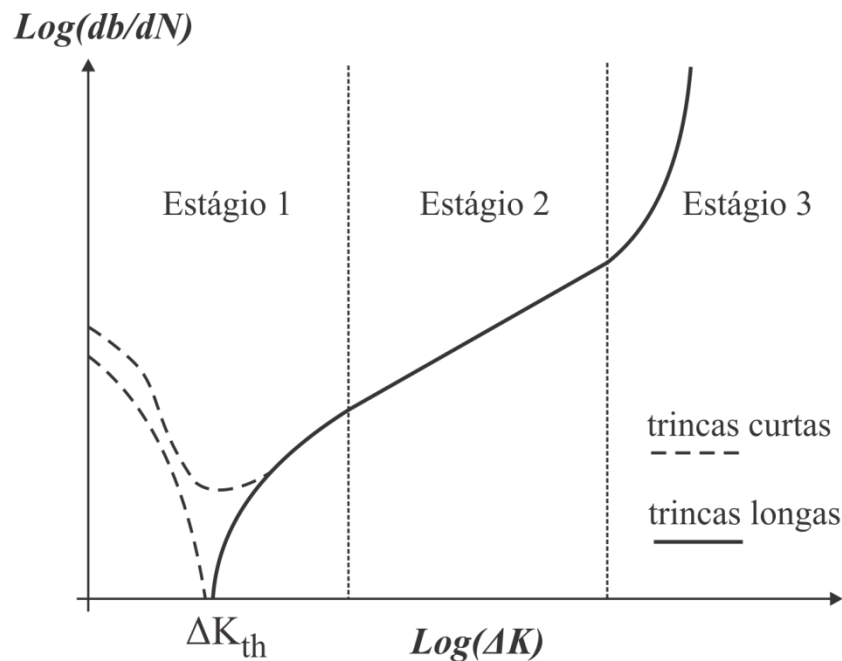


Figura 15- Taxa de crescimento da trinca em função de  $\Delta K$

### 3.1.3 TRINCAS CURTAS

A caracterização do problema de crescimento de trincas em componentes sujeitos a cargas de fadiga em termos da Mecânica da fratura Linear Elástica apoia-se em dados experimentais de fadiga obtidos de corpos de prova contendo trincas relativamente longas. Entretanto, em projetos de engenharia frequentemente se lida com trincas de dimensões bastante reduzidas.

A taxa e crescimento de trincas curtas podem ser significativamente maiores que a taxa de crescimento para trincas longas submetidas ao mesmo estado de carregamento. Observa-se também que trincas curtas crescem a taxas consideráveis quando o  $\Delta K$  nominal é menor que limiar do fator intensidade de tensão  $\Delta K_{th}$  para trincas longas.

A primeira observação relatada de crescimento acelerado de trincas curtas de fadiga é atribuída a Pearson (1975), que examinou os efeitos do tamanho da trinca nas taxas de propagação para uma liga de alumínio endurecida. Ele notou que trincas curtas superficiais (0.006 até 0.5 mm) cresciam 100 vezes mais rápido que trincas longas, quando submetidas ao mesmo  $\Delta K$  nominal. Esta investigação também mostrou indícios da possibilidade do crescimento de trincas curtas submetidas a faixas de tensão nominal abaixo do limiar para trincas longas. Estudos posteriores (Lankford, 1982 e 1986, Miller et al., 1986, e Kitagawa e Tanaka, 1990) consideraram diferentes materiais mostrando várias acelerações e desacelerações transitórias associadas com o crescimento subcrítico de trincas curtas de fadiga. Smith et al. (1996) estudou o comportamento de trincas curtas em uma superliga de níquel. Acelerações e retardos na taxa de crescimento são observados com o crescimento do seu comprimento até que esta se torne uma trinca longa, cujo comportamento é descrito pela Mecânica da Fratura Linear Elástica.

## 3.2 CÁLCULO DO FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO EM PROBLEMAS DE FRETTING

O fator intensidade de tensão na ponta da trinca foi obtido através do método da distribuição das discordâncias, que é descrito detalhadamente por Nowell e Hills (1994). Uma breve descrição do método será apresentada neste trabalho.

A técnica se baseia no princípio de Bueckner (1958), que é basicamente um princípio de superposição. Suponha um corpo com uma trinca sujeito a cargas de contato como mostrados na Fig. 16. Um problema equivalente ao original pode ser obtido com a superposição de (a) e (b), onde (a) representa o corpo sem a trinca submetido às cargas de contato e (b) representa um corpo trincado na ausência de cargas externas, mas com as tensões na linha da trinca iguais em intensidade, mas opostas

em relação às tensões na linha da trinca devido às cargas de contato, de forma que ao se somar os dois problemas, as faces da trinca estejam livre de tensões.

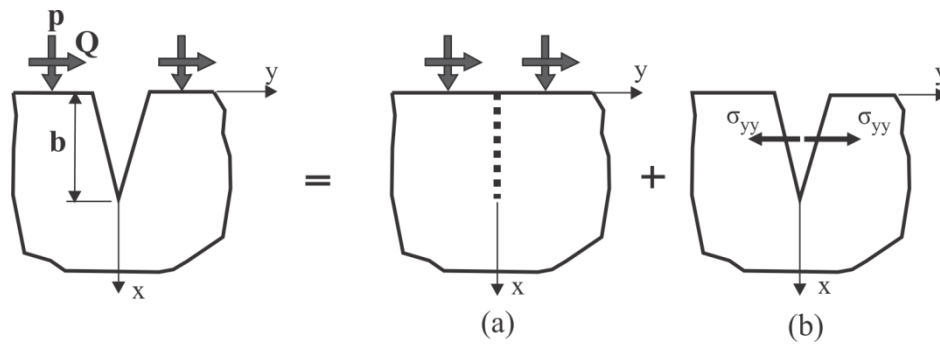


Figura 16- Princípio de Bueckner: (a) Corpo sem a trinca sujeito a cargas de contato; (b) corpo trincado na ausência de cargas externas, mas com as tensões ao longo da trinca iguais e postas às tensões do problema (a).

As Eq. (2.23) e (2.24) fornecem as componentes de tensão normais à trinca,  $\sigma_N$ , ao longo da linha da trinca para o caso (a). Como as tensões nas faces da trinca no problema original devem ser nulas, nós distribuimos deslocamentos de descontinuidades (‘dislocations’) ao longo da linha da trinca para produzirmos (b), assim as tensões induzidas cancelam as tensões do problema de contato, (a) + (b). Esse procedimento resulta em uma equação integral em relação à desconhecida densidade de deslocamentos longo da linha da trinca.

O primeiro passo é determinar o estado de tensão,  $\sigma_{yy}$ , induzido em um ponto  $(x, 0)$  por um único deslocamento de largura  $b_y$  (vetor de Burguer) colocado em um ponto  $(e, 0)$  na geometria a ser modelada, nesse caso um semi-plano. A solução desse problema foi obtida por Dundurs e Sendekyj (1965):

$$\sigma_{yy} = \frac{2\mu b_y}{\pi(k+1)} G(x, e) \quad (3.4)$$

onde  $\mu$  é o módulo de rigidez do material,  $k$  é a constante de Kolosov ( $k = 3 - 4\nu$ ) em estado plano de deformação,  $\nu$  é razão de Poisson, e o Kernel  $G(x, e)$  é dado por:

$$G(x, e) = \frac{1}{x-e} - \frac{1}{x+e} - \frac{2e}{(x+e)^2} + \frac{4e^2}{(x+e)^3} \quad (3.5)$$

Uma distribuição contínua de deslocamento com densidade  $B_y(e)$  é agora considerada ao longo da trinca, atendendo a condição de que as faces da trinca devem estar livres de tensão em todo seu domínio, assim temos:

$$\sigma_N + \frac{2\mu}{\pi(k+1)} \int_0^b B_y(e) G(x, e) de = 0 \quad (3.6)$$

onde

$$B_y(e) = \frac{\partial b_y}{\partial e} \quad (3.7)$$

$b$  é o comprimento da trinca e  $\sigma_N$  são as tensões normais a trinca devido a um carregamento externo. Essa equação integral em relação à função desconhecida  $B_y(e)$  contem um Kernel de Cauchy. Uma discretização utilizando a quadratura de Gauss-Jacobi produz um sistema algébrico linear com  $n$  equações e  $n$  incógnitas, Eq. (3.8), que pode ser resolvido com métodos numéricos padrões. O fator de intensidade de tensão pode então ser calculado diretamente através da densidade de deslocamento.

$$\frac{\mu}{\pi(k+1)} \sum_{i=1}^n \frac{2\pi(1+r_j)}{2n+1} G(s_i, r_j) \phi(r_j) = -\sigma_N(s_i) \quad (3.8)$$

$$r_j = \cos\left(\frac{2j-1}{2n+1}\pi\right), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$s_i = \cos\left(\frac{2j}{2n+1}\pi\right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

onde  $s_i$  e  $r_j$  são as componentes  $x$  e  $e$  respectivamente normalizadas e discretizadas e  $\phi$  é uma função desconhecida. A relação matemática para encontrar o fator intensidade de tensão é dada por:

$$K_I = 2\sqrt{2}\sqrt{\pi b} \frac{\mu}{k+1} \phi(1) \quad (3.9)$$

Os valores de  $\phi$  obtidos pela Eq. (3.8), são revelados apenas para os pontos de integração,  $r_j$ , e para sua definição em outros pontos precisamos examinar a definição do polinômio de interpolação fundamental de Jacobi. Através disso, pode-se então deduzir a fórmula para avaliar  $\phi$  ao longo de todo o domínio. Isso foi feito por Krenk (1975):

$$\phi(1) = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=1}^n \cot\left(\frac{2j-1}{2n+1}\pi\right) \sin\left(\frac{n}{2n+1}(2j-1)\pi\right) \phi(r_j) \quad (3.10)$$

No entanto, normalmente uma trinca se inicia em modo II e assim esta se propaga como mostrado na Fig. 17. Trincas inclinadas produzem uma série de complicações adicionais na modelagem do problema. A primeira delas é que ambos os deslocamentos  $b_x$  e  $b_y$  induzem tanto tensões cisalhantes quanto tensões normais ao longo da linha da trinca ( $\hat{y} = 0$ ) então há uma ligação entre cargas modo I e II.

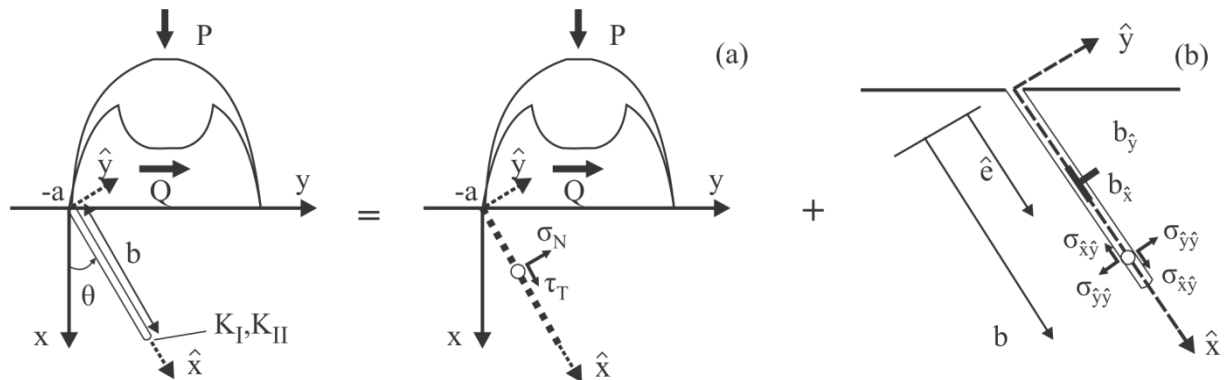


Figura 17- Princípio de Bueckner: (a) Corpo sem a trinca sujeito a cargas externas, (b) corpo trincado na ausência de cargas externas, mas com tensões ao longo da linha da trinca iguais em módulo, mas opostas as do problema (a)

O ponto de partida para o cálculo dos fatores intensidades de tensão é encontrar o estado de tensão induzido pelos deslocamentos, Dundurs e Mura (1964). Para um deslocamento contendo componentes  $(b_x, b_y)$  localizados em  $(e, 0)$  em coordenadas globais, o estado de tensão induzido é dado por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{\mu}{\pi(k+1)} \left\{ \begin{bmatrix} G_{xxx}(x, y, e) \\ G_{xyy}(x, y, e) \\ G_{xxy}(x, y, e) \end{bmatrix} b_x + \begin{bmatrix} G_{yxx}(x, y, e) \\ G_{yyy}(x, y, e) \\ G_{yxy}(x, y, e) \end{bmatrix} b_y \right\} \quad (3.11)$$

onde as funções definidas como,  $G_{ijk}$  são dadas explicitamente em Nowell (1994). Essas equações relacionadas aos vetores de Burguer estão em coordenadas globais  $(x, y)$ , no entanto com o objetivo de escrever uma equação expressando a imposição de que as tensões ao longo das faces das trinca devem ser nulas, se faz conveniente transformar o estado de tensão para coordenadas locais  $(\hat{x}, \hat{y})$ , Fig. 17 (a). Também é conveniente expressar os vetores de Burguer em coordenadas locais, Fig.17 (b). Então:

$$\begin{aligned} \tau_{\hat{x}\hat{y}} &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta) \\ \sigma_{\hat{y}\hat{y}} &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta) \\ \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{\hat{x}} \\ b_{\hat{y}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Substituindo a Eq. (3.12) na Eq. (3.11) podemos encontrar um novo conjunto de funções, que se tornaram kernels de equações integrais, expressas exclusivamente em coordenadas locais:

$$\begin{bmatrix} \tau_{\hat{x}\hat{y}} \\ \sigma_{\hat{y}\hat{y}} \end{bmatrix} = \frac{\mu}{\pi(k+1)} \left\{ \begin{bmatrix} K_{\hat{x}}^S(\hat{x}, \hat{e}) \\ K_{\hat{x}}^N(\hat{x}, \hat{e}) \end{bmatrix} b_{\hat{x}}(\hat{e}) + \begin{bmatrix} K_{\hat{y}}^S(\hat{x}, \hat{e}) \\ K_{\hat{y}}^N(\hat{x}, \hat{e}) \end{bmatrix} b_{\hat{y}}(\hat{e}) \right\} \quad (3.13)$$

onde os subscritos nos kernels,  $K$ , denotam a direção dos vetores de Burguer e os sobrescritos a direção das tensões.

Podemos agora formar duas integrais simultâneas análogas a Eq. (3.6), distribuindo deslocamentos ao longo da linha da trinca de forma a anular as tensões induzidas por cargas externas ao longo dessa linha:

$$\tau_T(\hat{x}) + \frac{\mu}{\pi(k+1)} \left\{ \int_0^b B_{\hat{x}}(\hat{e}) K_{\hat{x}}^S(\hat{x}, \hat{e}) d\hat{e} + \int_0^b B_{\hat{y}}(\hat{e}) K_{\hat{y}}^S(\hat{x}, \hat{e}) d\hat{e} \right\} = 0 \quad (3.14)$$

$$\sigma_N(\hat{x}) + \frac{\mu}{\pi(k+1)} \left\{ \int_0^b B_{\hat{x}}(\hat{e}) K_{\hat{x}}^N(\hat{x}, \hat{e}) d\hat{e} + \int_0^b B_{\hat{y}}(\hat{e}) K_{\hat{y}}^N(\hat{x}, \hat{e}) d\hat{e} \right\} = 0 \quad (3.15)$$

onde  $\sigma_N(\hat{x})$ ,  $\tau_T(\hat{x})$  são os valores das tensões em coordenadas locais devido as cargas externas e  $B_{\hat{x}}$ ,  $B_{\hat{y}}$  são as densidades de deslocamento, definidas como:

$$B_i = \frac{\partial b_i(\hat{e})}{\partial \hat{x}} \quad i = x \text{ ou } y \quad (3.16)$$

Novamente, as integrais das Eq. (3.14) e (3.15) podem ser discretizadas utilizando-se quadratura de Guass-Jacobi, nos fornecendo um sistema algébrico linear  $2n$  por  $2n$ :

$$\frac{\mu}{\pi(k+1)} \sum_{i=1}^n \frac{2\pi(1+r_i)}{2n+1} \left( K_{\hat{x}}^S(s_i, r_j) \phi_{\hat{x}}(r_j) + K_y^S(s_i, r_j) \phi_{\hat{y}}(r_j) \right) = -\tau_T(s_i) \quad (3.17)$$

$$\frac{\mu}{\pi(k+1)} \sum_{i=1}^n \frac{2\pi(1+r_i)}{2n+1} \left( K_{\hat{x}}^N(s_i, r_j) \phi_{\hat{x}}(r_j) + K_y^N(s_i, r_j) \phi_{\hat{y}}(r_j) \right) = -\sigma_T(s_i) \quad (3.18)$$

os pontos de integração  $r_j$  e  $s_i$  são dados pela Eq.(3.13) e os fatores intensidades de tensão são dados por:

$$K_I = 2\sqrt{2}\sqrt{\pi b} \frac{\mu}{k+1} \phi_y(1) \quad (3.19)$$

$$K_{II} = 2\sqrt{2}\sqrt{\pi b} \frac{\mu}{k+1} \phi_x(1) \quad (3.20)$$

Os valores das funções  $\phi_x$  e  $\phi_y$  na ponta da trinca podem ser obtidos novamente pela Eq.(3.10) de interpolação

### 3.3 METODOLOGIAS PARA PARADA DO CRESCIMENTO DE TRINCAS CURTAS

Considerando dados para trincas curtas obtidas para uma variedade de materiais, Kitagawa e Takahashi (1976) verificaram que existe um tamanho crítico  $b_0$  abaixo do qual o limiar de propagação de trincas,  $\Delta K_{th}$ , decresce com o decrescimento do tamanho da trinca. Na Fig. 18 (a) observa-se que para  $b < b_0$  a condição limiar de propagação de trinca é caracterizada por uma faixa de tensão crítica  $\Delta\sigma_{th}$ , a qual se aproxima do limite de fadiga para corpos lisos  $\Delta\sigma_{fl}$ . Para  $b > b_0$ , Fig. 18 (b) observa-se que  $\Delta K_{th}$  é independente do tamanho da trinca. Esse valor então de  $\Delta K$  será denominado, desse ponto em diante de limiar do fator intensidade de tensão para trincas longas,  $\Delta K_0$ .

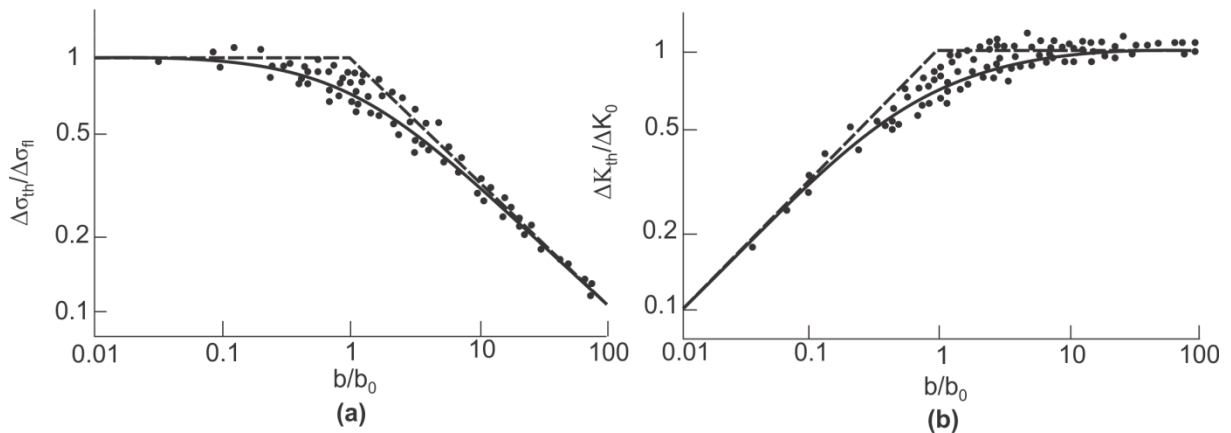


Figura 18- Efeito do tamanho da trinca (a) tensão limiar e (b) no fator intensidade de tensão para uma grande variedade de ligas de engenharia (Kitagawa-Takahashi, 1976).

El Haddad et al. (1979) propuseram a seguinte expressão para o fator de intensidade de tensão de uma trinca de comprimento efetivo  $b + b_0$ .

$$\Delta K = \Delta \sigma \sqrt{\pi(b + b_0)} \quad (3.21)$$

onde  $\Delta \sigma$  é a faixa de tensão aplicada, e  $b_0$  é o tamanho intrínseco da trinca, uma constante para um dado material.

A Eq. (3.21) é uma formulação empírica, que prediz maiores valores de  $\Delta K_{th}$  para trincas curtas. Note que para comprimentos de trincas inferiores a  $b_0$ , Fig. 18 (a), a faixa de tensão limiar para trincas curtas passa a se aproximar do limite de fadiga do material  $\Delta \sigma_{fl}$ , sendo assim:

$$\Delta K_0 = F \Delta \sigma_{fl} \sqrt{\pi b_0} \quad (3.22)$$

em que  $F$  é um fator geométrico. Isolando-se então  $b_0$  na Eq. (3.22):

$$b_0 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\Delta K_0}{F \Delta \sigma_{fl}} \right)^2 \quad (3.23)$$

Em todo caso, a modificação empírica de El-Haddad produz um limiar de propagação de trincas descrito por:

$$\frac{\Delta K_{th}}{\Delta K_0} = \sqrt{\frac{b}{b + b_0}} \quad (3.24)$$

E o diagrama Kitagawa-Takahashi, sugere a seguinte aproximação:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K_0} &= \sqrt{\frac{b}{b_0}}, & b < b_0 \\ \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K_0} &= 1, & b \geq b_0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

### 3.3.1 MODELO DE ARAÚJO E NOWELL (1999)

O cálculo do fator de intensidade de tensão em problemas de *fretting* não possui solução analítica devido à complexidade da distribuição do campo de tensão nos corpos em estudo, no entanto, como já mostrado, o fator de intensidade de tensão pode ser obtido fazendo-se uso do método da distribuição das discordâncias.

Um primeiro modelo, onde o fator intensidade de tensão foi obtido para carregamentos de *fretting* via distribuição das discordâncias e feito posterior comparação com curvas para limiar de propagação

de trincas curtas, foi realizado por Araújo e Nowell (1999) para estimativa de resistência a fadiga em ligas aeronáuticas, Fig 19.

O fator intensidade de tensão modo I foi calculado para uma trinca se propagando perpendicular a superfície de contato. Para obter-se a variação do fator intensidade de tensão,  $\Delta K_I$ , fez-se o uso da seguinte equação:

$$\Delta K_I = K_I^{max} - K_I^{min} \quad (3.26)$$

onde  $K_I^{max}$  e  $K_I^{min}$  são respectivamente os valores máximos e mínimos do fator de intensidade de tensão em um ciclo completo de carregamento e descarregamento. Observa-se que  $K_I^{min}$  assume valores negativos nos carregamentos em estudo, e como um fator intensidade de tensão modo I negativo não contribui para a abertura da trinca, assume-se que esse é igual à zero, sendo assim:

$$\Delta K_I = K_I^{max} \quad (3.27)$$

A variação do fator intensidade de tensão modo II,  $\Delta K_{II}$ , assume valores significativamente menores que  $\Delta K_I$ , portanto como aproximação apenas esse é considerado na análise.

Analisando a Fig. 19, tem-se que curvas acima do diagrama Kitagawa-Takahashi, indicam falha do material, curva (A), ou seja, a trinca se propaga até o rompimento desse, já as curvas que cruzam o diagrama possuem vida infinita, curva (B). Essa metodologia foi aplicada e comparada com dados de vida em fadiga Nowell (1988), fornecendo bons resultados.

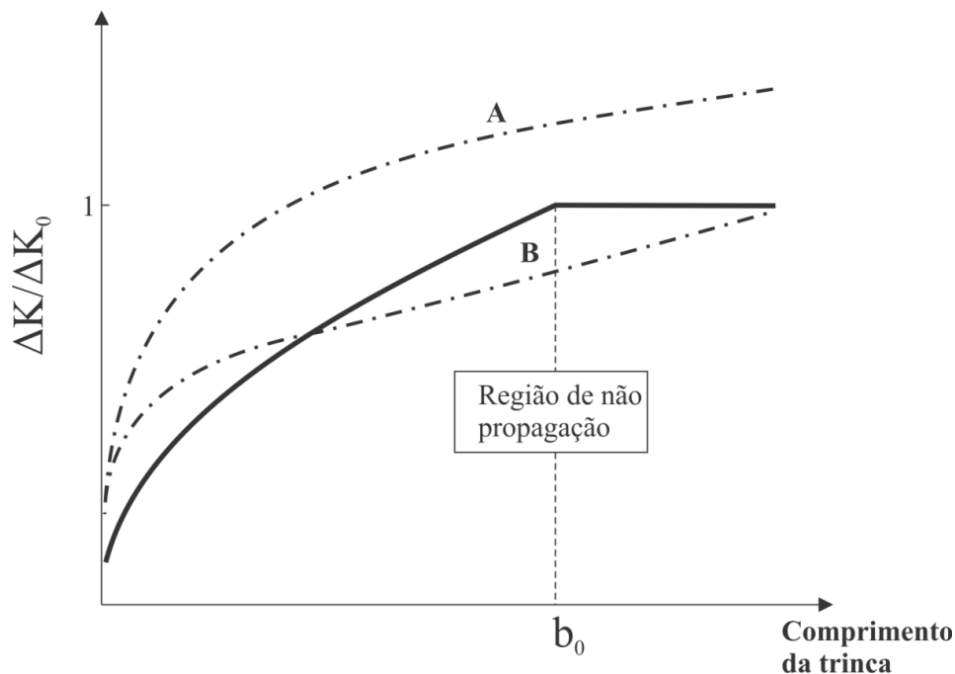


Figura 19- Metodologia proposta por Araújo e Nowell (1999)



### 3.3.2 MODELO DINI ET AL., (2006)

Um modelo semelhante ao de Araújo e Nowell (1999) foi aplicado por Dini et al., (2006) para prever resistência a fadiga em ligas aeronáuticas, no entanto, o modelo propôs o uso dos diagramas Kitagawa-Takahashi e da curva de El-Haddad.

Verificou-se que a curva de Kitagawa-Takahashi previa vida infinita para alguns ensaios enquanto que a curva de El-Haddad acusava falha do componente, Fig. 20. Para os dados experimentais utilizados, Nowell (1988), o modelo apresentou maior acurácia quando se fez o uso da curva de El-Haddad, levando a conclusão de que esta curva prevê melhores resultados que a aproximação de Kitagawa-Takahashi para o material em estudo.

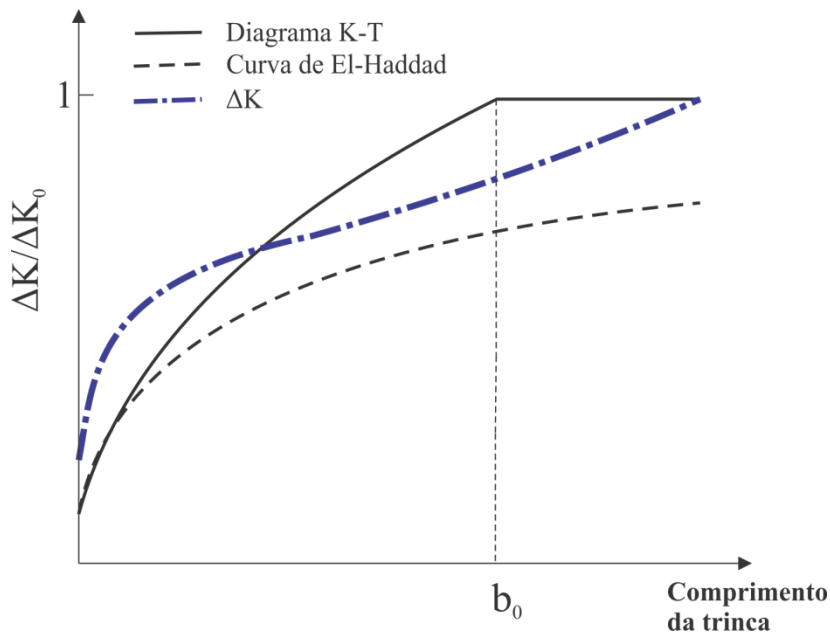


Figura 20- Metodologia proposta por Dini et al., (2006)

### 3.3.3 MODELO PROPOSTO NO PRESENTE TRABALHO

A metodologia que será adotada neste trabalho baseia-se no cálculo do fator intensidade de tensão em problemas de *fretting*, considerando propagação de trincas perpendiculares à superfície de contato, ou inclinadas de um ângulo  $\theta$ , para posterior comparação com limiares de propagação de trincas curtas, de forma semelhante ao que foi proposto por Dini et al., (2006). O principal objetivo deste trabalho, no entanto, não é apenas a estimativa de resistência à fadiga, mas sim a previsão do comprimento final de trincas que param de crescer em carregamento de *fretting* em ligas de aço.

Como metodologia para o cálculo da faixa do fator de intensidade de tensão, utilizou-se a Eq. (3.26) para trincas perpendiculares à superfície de contato, já para trincas inclinadas fez-se o uso de um fator de intensidade de tensão efetivo, que leve em conta os modos de propagação de trinca I e II:

$$\Delta K_{eff} = \sqrt{\Delta K_I^2 + \Delta K_{II}^2} \quad (3.28)$$

onde como visto anteriormente devido a cargas compressivas nas faces da trinca em condições de carga mínima  $\Delta K_I$  é dado por  $K_I$  máximo.

Para estimar o comprimento final de trincas que pararam de crescer, verificou-se o cruzamento da curva de fator de intensidade de tensão efetivo,  $\Delta K_{eff}$ , com duas curvas para limiar de propagação de trincas curtas, Fig. 21, de onde pode-se obter dois valores para o comprimento final da trinca  $b_{KT,\theta}$  e  $b_{EH,\theta}$ .

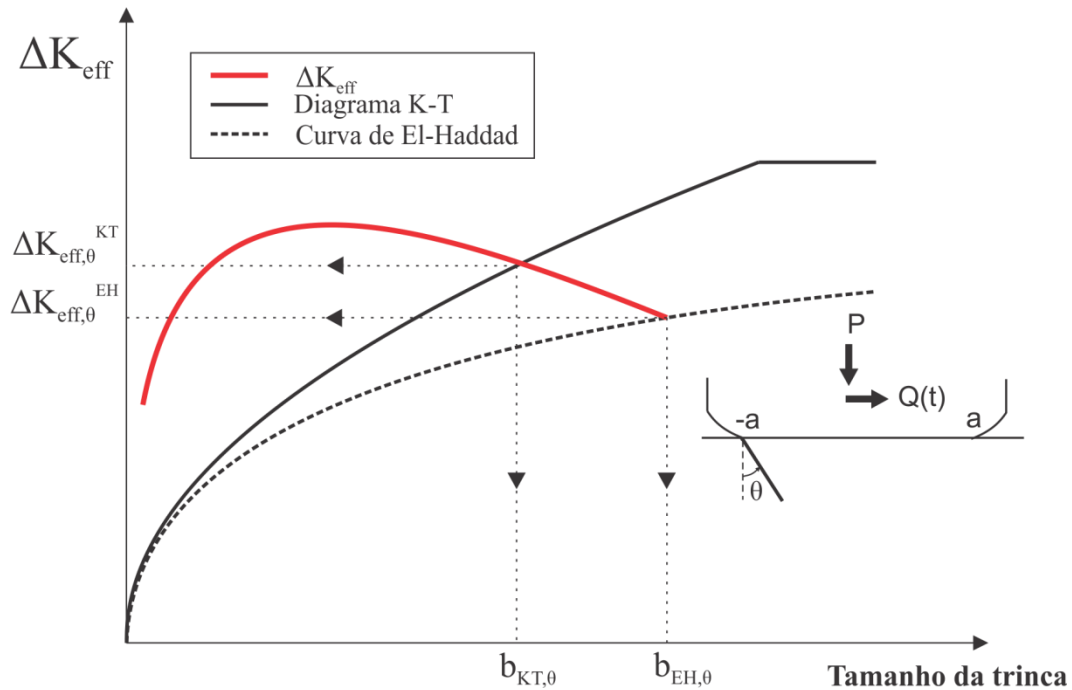


Figura 21- Representação esquemática da metodologia aplicada para estimar o comprimento de trincas.

Os termos  $b_{KT,\theta}$  e  $b_{EH,\theta}$  representam respectivamente o comprimento de trinca obtido fazendo-se o cruzamento da curva do fator intensidade de tensão efetivo com as curvas de Kitagawa-Takahashi e El-Haddad, o subscrito  $\theta$  representa o ângulo de propagação assumido para a trinca.

## 5 RESULTADOS

### 5.1 CONDIÇÕES EXPERIMENTAIS

Os testes de *fretting* considerados Fouvry (2007) foram realizados utilizando duas sapatas cilíndricas que foram carregadas contra um corpo de prova plano, submetidas a escorregamento parcial. Os ensaios de *fretting* considerados foram realizados em uma máquina servo hidráulica de ensaio de fadiga com um atuador.

O carregamento de *fretting* é obtido impondo-se uma força normal,  $F_n$ , seguida da aplicação de um deslocamento cíclico alternado de amplitude ( $\delta^*$ ). Como consequência uma carga tangencial ( $F_t$ ) é gerada na superfície de contato, Fig. 22. O raio da sapata cilíndrica de aço 52100 é  $R=40$  mm e seu comprimento  $L= 5$  mm, fornecendo a condição de estado plano de deformação. Duas condições distintas de cargas normais foram aplicadas nos ensaios:  $P = F_n/L = 227$  N/mm e  $P = F_n/L = 540$  N/mm. Os testes foram conduzidos sob a aplicação de um deslocamento cíclico alternado de 40 Hz.

O material utilizado nos corpos de prova foi aço AISI 1034, cujo as propriedades estão listadas na Tab. 2. Aço cromo 52100 foi utilizado na fabricação das sapatas, para garantir similaridade elástica e ao mesmo tempo garantir propagação da trinca apenas no corpo de prova.

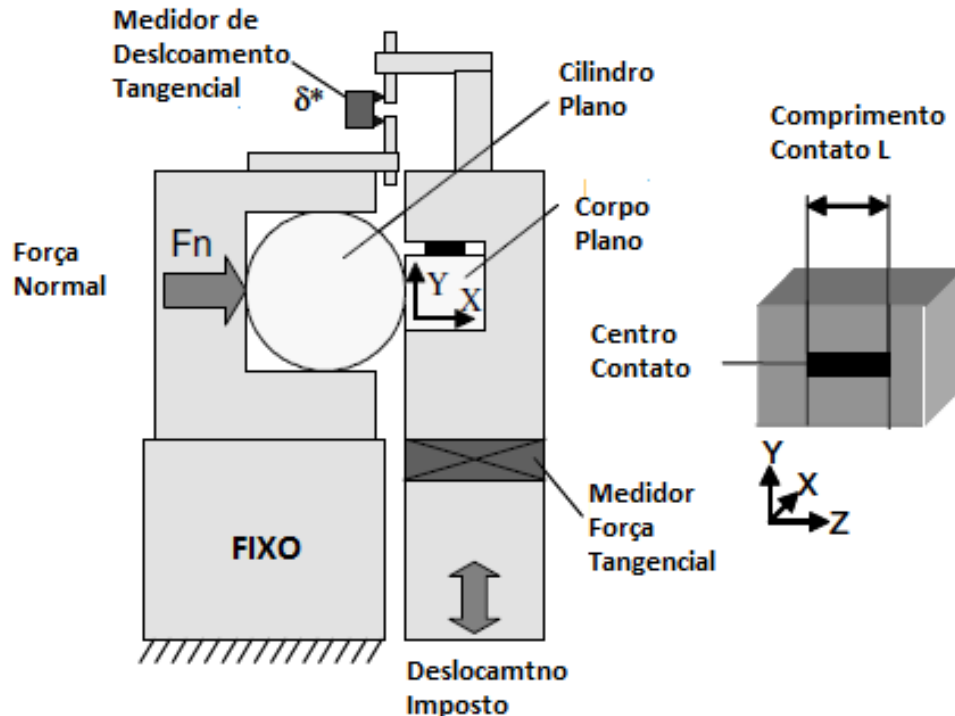


Figura 22- Modelo esquemático de um ensaio de *fretting*, modificado (Fouvry, 2007).

Tabela 2- Propriedades mecânicas dos materiais;  $E$ : módulo de elasticidade;  $\nu$ : razão de Poisson;  $\sigma_Y$ : tensão de escoamento;  $\sigma_{UTS}$ : tensão última;  $\sigma_R$ : limite de resistência a fadiga;  $\Delta K_0$ : limiar de propagação para trincas longas.

Material	$E$ (GPa)	$\nu$	$\sigma_Y$ (MPa)	$\sigma_{UTS}$ (MPa)	$\sigma_{fl}$ (MPa)( $R - 1$ )	$\Delta K_0(R = -1)$ (MPa $\sqrt{m}$ )
AISI 1034	200	0.3	350	600	$270 \pm 10$	$7 \pm 1$
52100	210	0.3	1700	2000	-	-

## 5.2 ESTIMATIVA DO COMPRIMENTO DE TRINCAS QUE PARAM DE CRESCER

Os resultados experimentais utilizados neste trabalho foram produzidos por Fouvry (2007). Uma das finalidades da pesquisa desenvolvida por ele em seu trabalho foi à realização de ensaios de fadiga por *fretting* na ausência de cargas remotas, com o intuito de medir o comprimento e o ângulo de crescimento de trincas em corpos de prova que atingiram vida infinita.

As propriedades mecânicas das sapatas e dos corpos de prova utilizados nos ensaios já foram apresentadas, capítulo 5.1, assim como as condições de cargas normais,  $P = 227$  N/mm e 540 N/mm. Para cada uma dessas condições de carga normal aplicada, uma variedade de ensaios variando a carga tangencial  $Q$  foram realizados, originando uma gama de resultados para comprimento de trincas experimentais que são apresentados nas Tab. 3 e 4. Verificou-se também que as trincas se propagaram com um ângulo  $\theta$  de aproximadamente  $30^\circ$  em relação a normal a superfície de contato Fig. 23.

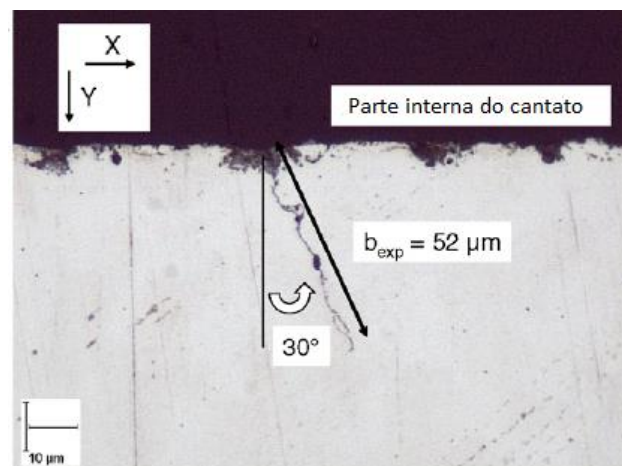


Figura 23- Caminho da trinca experimental observado através de fotografia, Fouvry (2007)

Aplicando-se a metodologia mostrada na Fig. 21 para estimar o comprimento de trincas que param de crescer, considerou-se primeiramente um trinca se propagando de forma perpendicular a superfície de contato, assim foram geradas as Tab. 3 e 4 para as duas condições distintas de carga normal (227 N/mm e 540 N/mm), onde  $b_{exp}$  é o comprimento da trinca obtido experimentalmente;  $b_{KT,0^\circ}$  e  $b_{EH,0^\circ}$  estão definidos na Fig. 21;  $\sigma_{V,M,i}$  é a máxima tensão de Von Mises antes da propagação da trinca;  $\sigma_{V,M,f}$  é máxima tensão de von Mises no ponto correspondente ao tamanho da trinca.

Tabela 3- Parâmetros de parada de trinca em experimentos de *fretting* ( $f = 0.9$ ,  $10^6$  Ciclos),  $\theta=0^\circ$ ,  $P=227$  N/mm;

Condição de menor carga normal: $P=227$ N/mm							
$Q^*$ (N/mm)	$b_{exp}$ ( $\mu m$ )	$b_{KT,0^\circ}$ ( $\mu m$ )	$b_{EH,0^\circ}$ ( $\mu m$ )	$\frac{b_{exp} - b_{KT,0^\circ}}{b_{exp}}$ %	$\frac{b_{exp} - b_{EH,0^\circ}}{b_{exp}}$ %	$\sigma_{VM,i}/\sigma_Y$	$\sigma_{VM,f}/\sigma_Y$
126	24	40	49	65	106	1.62	0.67
137	29	47	61	63	110	1.69	0.67
144	31	53	69	69	123	1.73	0.68
146	52	54	72	4	38	1.74	0.48
151	55	58	78	6	42	1.77	0.49
164	65	69	97	6	49	1.85	0.48
169	68	74	105	8	54	1.87	0.49

Tabela 4- Parâmetros de parada de trinca em experimentos de *fretting* ( $f = 0.9$ ,  $10^6$  Ciclos),  $\theta=0^\circ$ ,  $P=540$  N/mm;

Condição de maior carga normal: $P=540$ N/mm							
$Q^*$ (N/mm)	$b_{exp}$ ( $\mu m$ )	$b_{KT,0^\circ}$ ( $\mu m$ )	$b_{EH,0^\circ}$ ( $\mu m$ )	$\frac{b_{exp} - b_{KT,0^\circ}}{b_{exp}}$ %	$\frac{b_{exp} - b_{EH,0^\circ}}{b_{exp}}$ %	$\sigma_{VM,i}/\sigma_Y$	$\sigma_{VM,f}/\sigma_Y$
242	14	78	101	456	625	2.24	1.28
243	28	79	102	180	266	2.25	0.95
278	77	101	139	31	80	2.40	0.52
280	61	102	141	68	132	2.41	0.66
282	52	103	144	99	176	2.42	0.77
283	75	104	145	39	93	2.43	0.55

Através desses resultados fica claro que o diagrama de Kitagawa-Takahashi utilizado como limiar de propagação de trincas curtas gera melhores predições que a curva de El-Haddad. Assim como as predições para trincas menores em ambos os casos ( $P = 227$  N/mm e  $P = 540$  N/mm), apresentaram maiores discrepâncias em relações aos dados experimentais, fator esse possivelmente atribuído ao elevado grau de plasticidade desenvolvido nas proximidades do contato.

O mesmo procedimento foi realizado considerando agora a propagação de trincas fazendo um ângulo de 30° com a perpendicular a superfície de contato, onde  $b_{KT,30^\circ}$  e  $b_{EH,30^\circ}$  estão definidos na Fig. 21.

Tabela 5- Parâmetros de parada de trinca em experimentos de *fretting* ( $f = 0.9$ ,  $10^6$  Ciclos),  $\theta=30^\circ$ ,  $P=227$  N/mm;

Condição de menor carga normal: $P=227$ N/mm							
$Q^*$ (N/mm)	$b_{exp}$ ( $\mu m$ )	$b_{KT,30^\circ}$ ( $\mu m$ )	$b_{EH,30^\circ}$ ( $\mu m$ )	$\frac{b_{exp} - b_{KT,30^\circ}}{b_{exp}} \%$	$\frac{b_{exp} - b_{EH,30^\circ}}{b_{exp}} \%$	$\sigma_{VM,i}/\sigma_Y$	$\sigma_{VM,f}/\sigma_Y$
126	24	37	45	55	88	1.62	0.83
137	29	44	56	53	92	1.69	0.83
144	31	49	63	59	104	1.73	0.85
146	52	51	66	-2	26	1.74	0.66
151	55	55	72	-1	30	1.77	0.67
164	65	65	91	0	40	1.85	0.68
169	68	70	100	3	48	1.87	0.69

Tabela 6- Parâmetros de parada de trinca em experimentos de *fretting* ( $f = 0.9$ ,  $10^6$  Ciclos),  $\theta=30^\circ$ ,  $P=540$  N/mm;

Condição de maior carga normal: $P=540$ N/mm							
$Q^*$ (N/mm)	$b_{exp}$ ( $\mu m$ )	$b_{KT,30^\circ}$ ( $\mu m$ )	$b_{EH,30^\circ}$ ( $\mu m$ )	$\frac{b_{exp} - b_{KT,30^\circ}}{b_{exp}} \%$	$\frac{b_{exp} - b_{EH,30^\circ}}{b_{exp}} \%$	$\sigma_{VM,i}/\sigma_Y$	$\sigma_{VM,f}/\sigma_Y$
242	14	71	88	405	532	2.24	1.45
243	28	71	89	154	219	2.25	1.16
278	77	92	123	19	59	2.40	0.77
280	61	93	125	53	105	2.41	0.91
282	52	94	127	81	145	2.42	1.01
283	75	95	129	27	71	2.43	0.80

Considerando a propagação de trincas inclinadas obteve-se uma melhora nos resultados de predição em relação aos resultados obtidos para trincas retas. Novamente o diagrama de Kitagawa-Takahashi como limiar forneceu melhores resultados, e as maiores discrepâncias foram observadas para as trincas mais curtas. Os erros obtidos nas estimativas estão sintetizados nas Fig. 24 e 25.

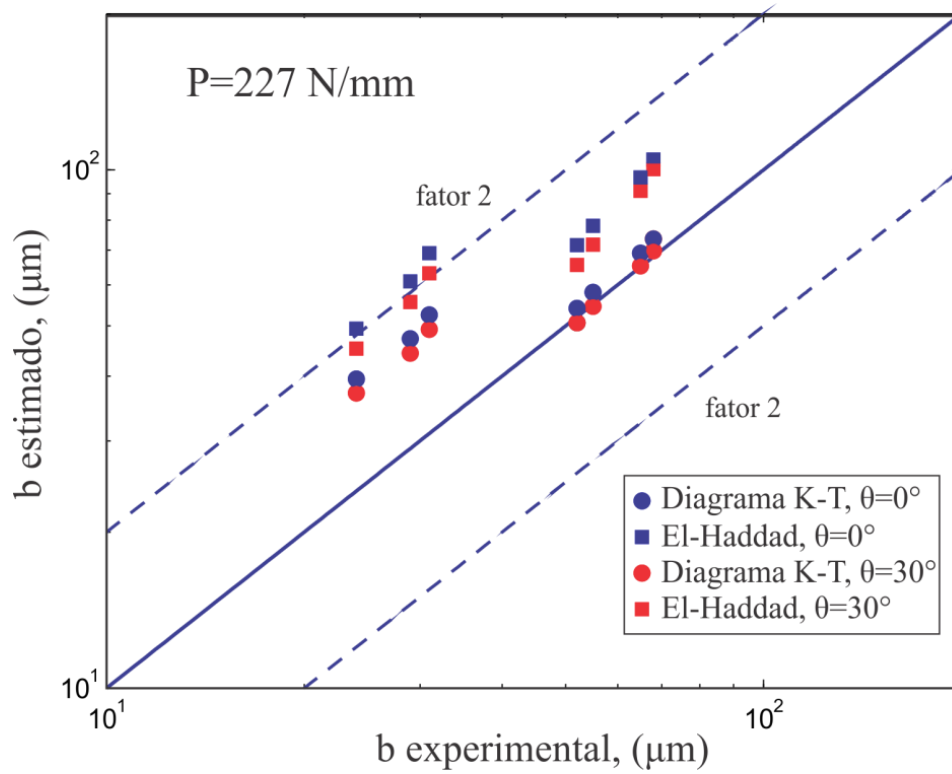


Figura 24- Estimativa para carga  $P=227 \text{ N/mm}$

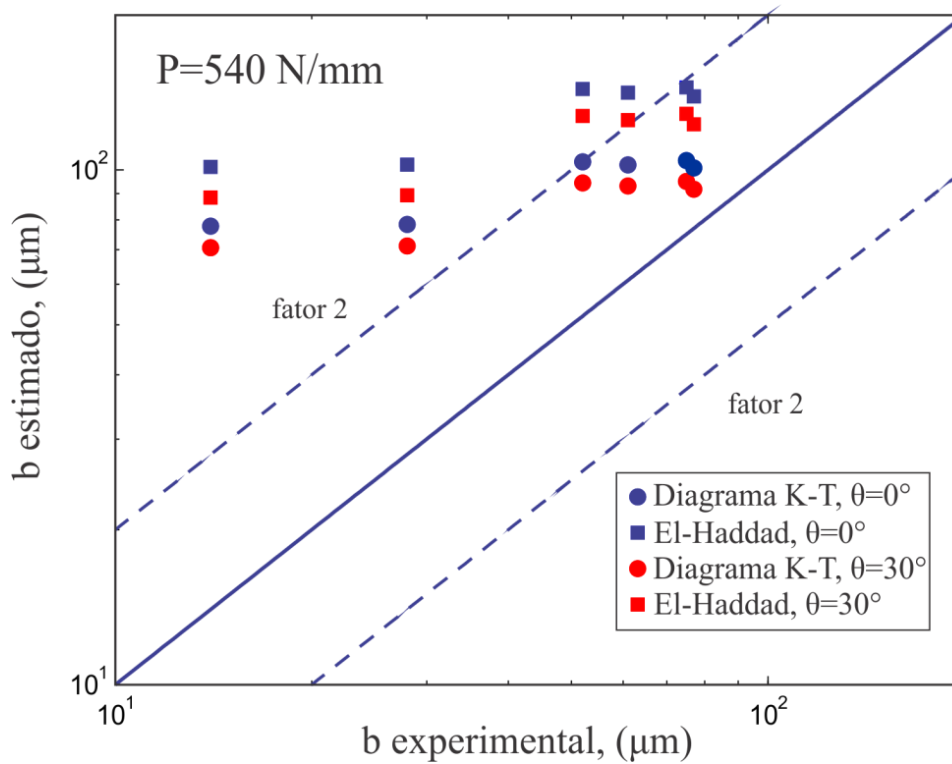


Figura 25- Estimativa para carga  $P=540 \text{ N/mm}$

As figuras 24 e 25 deixam evidente que além do diagrama K-T como limiar de propagação de trincas curtas fornece melhores previsões, os comprimentos estimados para trincas assumindo-se a propagação de trincas a  $0^\circ$  ou a  $30^\circ$  não apresentam grandes divergências.

A semelhança entre os comprimentos de trincas estimados assumindo-se uma trinca perpendicular à superfície de contato, modo I de propagação, ou considerando um trinca inclinada se dão devido ao fato de que apesar de na trinca inclinada serem contabilizados tanto os fatores de intensidade de tensão modo I quanto modo II a trinca perpendicular apresenta um maior fator intensidade de tensão modo I, Fig. 26.

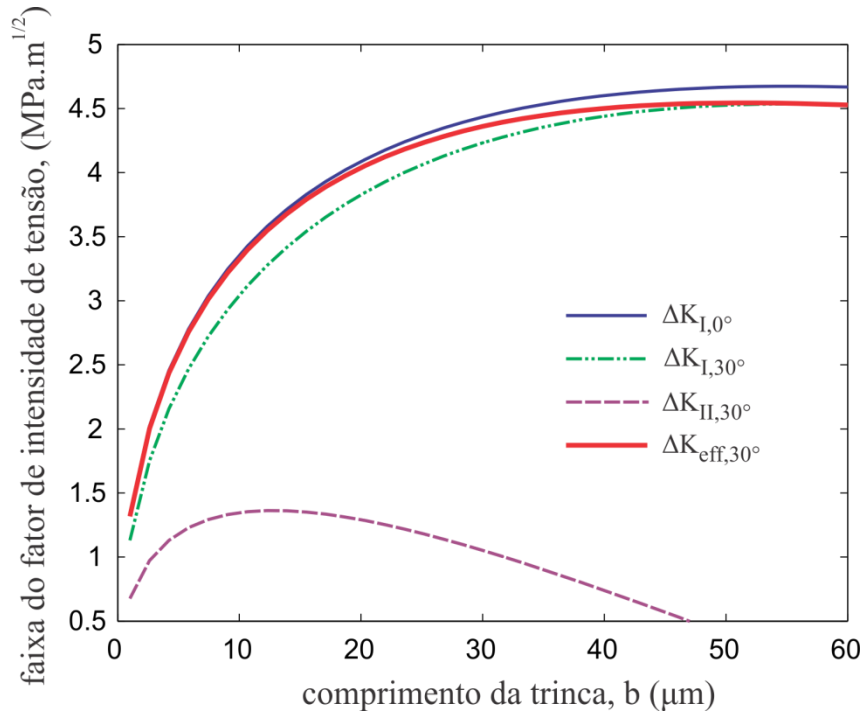


Figura 26- Efeito do ângulo da trinca no cálculo de  $\Delta K$

### 5.1.1 CONDIÇÃO DE CARGA $P=227$ N/mm

Analisando o caso em particular onde foram obtidos os melhores resultados, no caso o cruzamento da curva do fator intensidade de tensão com a curva de Kitagawa-Takahashi considerando-se a propagação de uma trinca inclinada a  $30^\circ$ , nota-se que para trincas menores os erros chegam a cerca de 60 % enquanto que para trincas maiores os erros são inferiores a 5%. As tensões de von Mises,  $\sigma_{VM,i}$  e  $\sigma_{VM,f}$ , no local de nucleação da trinca e no ponto onde a trinca para de crescer, respectivamente, quando comparados com a tensão de escoamento do material mostram que o ponto de nucleação da trinca experimenta significantes graus de plasticidade, embora, haja uma severa queda do campo de tensão a medida que se afasta da região do contato. Como o modelo aplicado neste trabalho é puramente elástico esse superestima o fator intensidade de tensão Fig. 27, particularmente para trincas mais curtas onde as deformações plásticas são maiores, já para trincas maiores, onde a mecânica linear elástica domina a predição possui maior acurácia.

Para trincas mais curtas, o caminho percorrido pela trinca é controlado por tensões e deformações plásticas, o que pode justificar a discrepância observada. A figura 28 mostra a influência do grau de plasticidade na região de propagação da trinca sobre os erros nas estimativas.



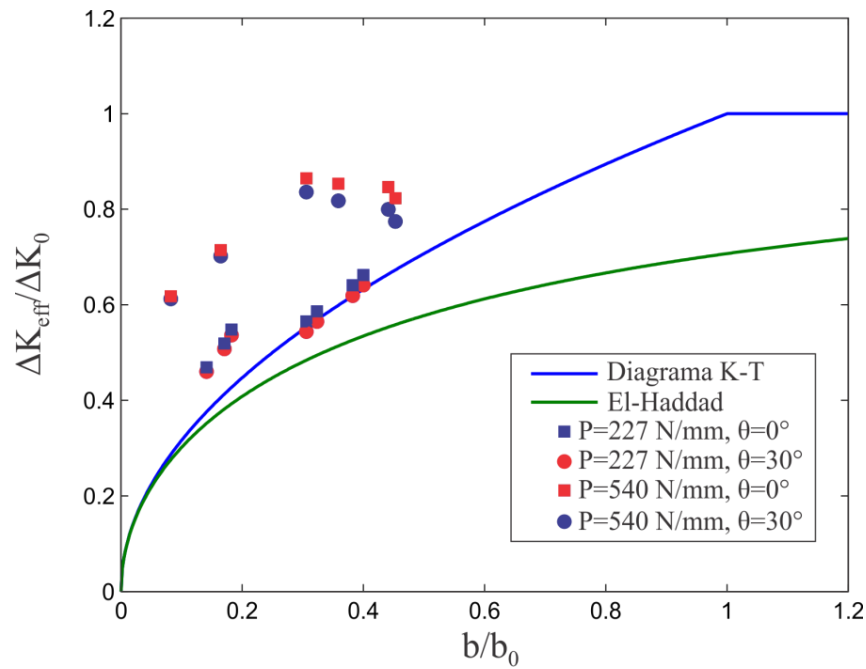


Figura 27- Fatores intensidade de tensão calculados para os comprimentos de trincas experimentais

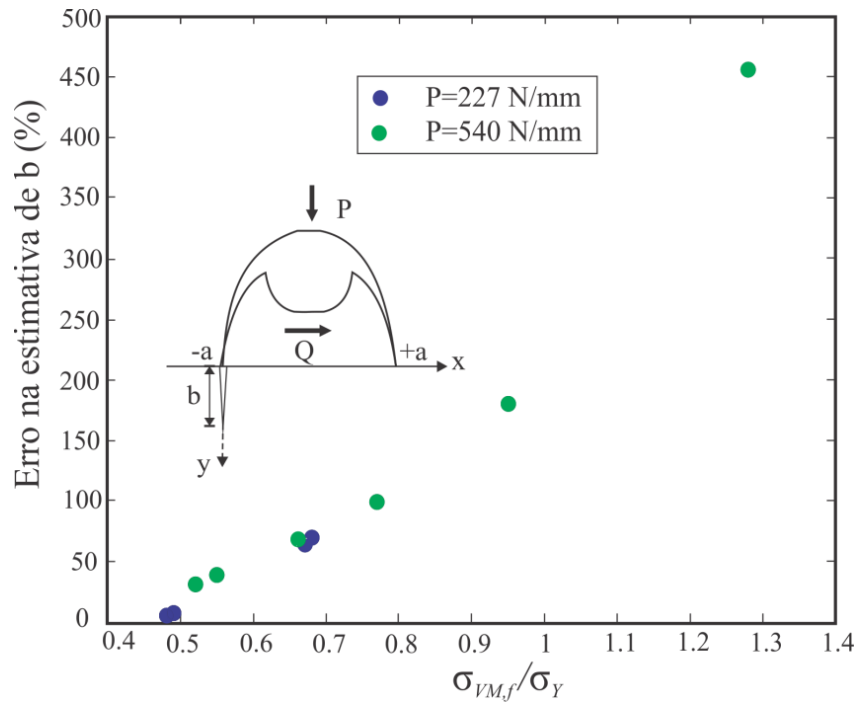


Figura 28- Erros associados ao grau de plasticidade na região de propagação da trinca,  $\theta=0^\circ$

### 5.1.2 CONDIÇÃO DE CARGA $P=540$ N/mm

As figuras 25 e 27 e as Tab. 4 e 6 mostram uma clara discrepância entre os comprimentos de trinca estimados e os respectivos valores experimentais nesta condição de carga normal mais alta. Esta discrepância está fortemente pode estar associada à severa acomodação plástica na escala global da superfície de contato e também na escala local do caminho da trinca que não são capturados pelo modelo puramente elástico utilizado, o que acaba por superestimar o campo de tensão ao longo do

caminho da trinca e consequentemente superestimar o cálculo do fator intensidade de tensão. Sendo assim o erro não se encontra nas curvas para limiar de propagação de trincas curtas (Kitagawa-Takahashi ou El-Haddad), mas sim na metodologia puramente elástica aplicada.

Nesses casos em que a plasticidade surge em escalas globais, o formalismo elástico não é de toda forma adequado e uma análise elasto-plástica é necessária. Entretanto, embora a metodologia puramente elástica não tenha sido tão precisa em determinadas situações, esta se mostra vantajosa no aspecto de apresentar resultados sistematicamente conservadores, ou seja, os resultados provenientes do modelo aplicado podem ser utilizados de forma adequada em projetos estruturais.

### 5.1.3 MODELOS PARA PROPAGAÇÃO DE TRINCAS CURTAS

Em ambas as condições de carga normais aplicadas ( $P=227$  N/mm e  $P=540$  N/mm) a curva de Kitagawa-Takahashi mostrou-se mais eficaz nas perdições.

Da Eq. (3.24) têm-se a curva de El-Haddad, porém seguindo o raciocínio de Bazant (1977), uma equação mais geral pode ser utilizada introduzindo-se um parâmetro material para fitar dados experimentais, Fig. 28.

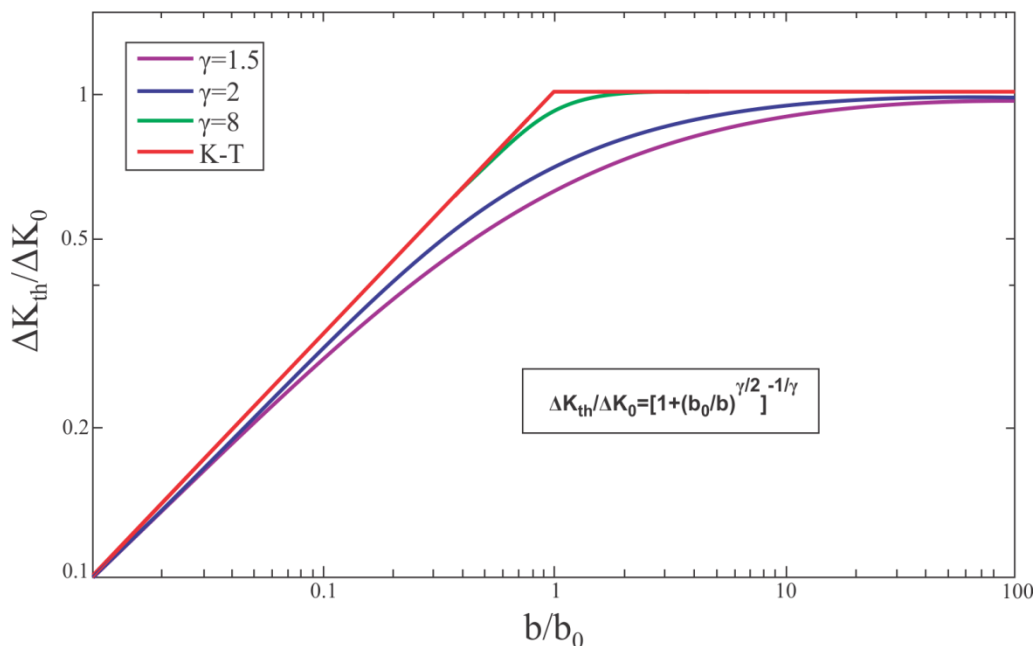


Figura 29-Limiar de propagação para trincas curtas e longas

Note que para  $\gamma=2$ , tem-se a solução de El-Haddad, e para  $\gamma = 8$  a curva aproxima-se de Kitagawa-Takahashi. Como neste trabalho os resultados foram bem melhores com a curva K-T, infere-se que o material utilizado possui um fator de Bazant mais elevado, justificando-se assim os piores resultados com a curva de El-Haddad, ao contrário do que aconteceu na análise feita por Dini et al., (2006).

# 6 CONCLUSÃO

## 6.1 CONCLUSÕES

Um modelo elástico analítico foi utilizado no presente trabalho para estimar o tamanho final de trincas que param de crescer em carregamentos sob condições de *fretting*, e posterior comparação com dados experimentais foi feita, de onde se conclui que:

- O modelo para parada de crescimento de trincas curtas, que primeiramente foi aplicado para previsão de resistência a fadiga em ligas aeronáuticas por Araújo et al., (1999) foi estendido para prever o comprimento máximo de trincas que param de crescer. Boas previsões foram obtidas quando em escalas globais e locais foram observados campos de tensão elásticos no material. Quando significantes graus de plasticidade estão presentes, o modelo torna-se bastante conservador, o que não descarta o uso da metodologia para análises estruturais.
- Apesar de os dados experimentais terem mostrados que as trincas se propagaram fazendo um ângulo de aproximadamente 30° com a vertical, a aproximação de uma trinca se propagando perpendicularmente a superfície de contato, forneceu bons resultados (condição de cargas mais baixas,  $P=227$  N/mm). As vantagens dessa aproximação são: facilidade na implementação da rotina para cálculo do fator de intensidade de tensão, e a princípio no início de um ensaio não sabe precisamente em que direção a trinca irá se propagar.
- Dentre as curvas para limiares de propagação de trincas curtas, o diagrama de Kitagawa-Takahashi apresentou melhores resultados quando utilizado no modelo, o que pode ser explicado utilizando-se as curvas de ajuste de Bazant, onde cada curva para o limiar de propagação de trincas em função dos comprimentos destas depende de propriedades materiais.

De modo geral, apesar das simplificações do modelo, esse pode ser uma boa ferramenta em uma primeira análise, tanto em projetos estruturais quanto na condução de ensaios de *fretting*. Fica evidente também a necessidade de um modelo mais completo em casos onde os efeitos da plasticidade são consideráveis, sendo necessário o uso de modelos acoplados entre os distintos problemas: propagação da trinca e interações de contato.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Araújo, J. A., 2000, “ On the initiation and arrest of Fretting Fatigue Cracks” . 2000. 231 f. Tese (D.Phil thesis), Oxford University, Oxford.
- Bazant ZP. “ Scalling of quasibrittle fracture: asymptotic analysis”. *Int J Fract* 1977;83:19-40.
- Beard, J. “ Palliatives for fretting fatigue. In: Waterhouse RB, Lindley TC, editors. *Fretting fatigue, ESIS 18*”. 2004. London: M.E.P; p. 419-36.
- Bramhall, R. “ Studies in fretting fatigue”. 1973. 241 f. Tese (D. Phil. Thesis), Oxford University, Oxford.
- Bueckner HF. “The propagation of crack and the energy of elastic deformation. *Trans ASME* 1958;80:1225-30.
- Civarella, M. & Demelio, G. “A review of analytical aspects of fretting fatigue, with extension to damage parameters, and application to dovetail joints”. 2001. *International Journal of Solids and Structures*, 38, (10-13), 1971-1811.
- Dini, D., Nowell, D., Dyson, I.N., “ The use of notch and short crack approaches to fretting fatigue threshold prediction: Theory and experimental validation”. *Tribology* 2006; 39:1158-1165.
- Dundurs J, Sendeckj GP. Behavior of an edge dislocation near a bimetallic interface. *J Appl Phys* 1965;36:3353-4.
- Eden, E. M., Rose, W.N., Cunningham, F.L. “The endurance of metals”. 1911. *ProcI Mech E*; 4:139.
- El Haddad, M. H., Topper, T. H., & Smith, K. N., 1979, “ Fatigue crack propagation of short cracks”, *F. Engng Mater. Tech. (ASME Trans.)*, 101, pp. 42-45.
- Fouvry, S., Nowell, D., Nubiak, K., Hills, D.A., 2007, “Prediction of fretting crack propagation based on a short crack methodology”. *Engineering Fracture Mechanics* 75 (2008) pp. 1605-1622.
- Giannakopoulos, A. E., Lindley, T.C., Suresh, S. “ Similarities of stress concentration in contact at round punches and fatigue at notches: implication to fretting fatigue crack initiation”. 2000. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 23/2000, pp 561-571.
- Hertz, H. “Über die Berührung fester elastischer Körper”. 1882. *Jnl Reine und angewandte Mathematik*, 92, pp. 156-171.
- Hills, D. A., Nowell, D., Sackfield, A. 1993, “*Mechanics of Elastic Contacts*”, Butterworth-Heinemann, Oxford.
- Hills, D. A., & Nowell, D., 1994, “ *Mechanical of Fretting Fatigue, Solid Mechanics and its aplications*”, Kluwer Academic Publishers.
- Kitagawa, H., & Takahashi, S., 1976, “Applicability of fracture mechanics to very small cracks or the crack in early stages”, *Proceedings of Second International Conference on Mechanical Behavior of Material*, pp. 627-31.
- Kitagawa, H., & Tanaka, T., 1990, “ *Fatigue 90*”, Birmingham: Material and Components Engineering Publications.
- Krenk, S., 1975 “ On the use of the interpolation polynomial for solution of singular integral equation., *Q. Appl. Maths.*, 32, 479-484.
- Lankford, J., 1982, “ The growth of small fatigue cracks in 7075-T6 aluminum”, *Fatigue Engng Master and Struct*, 5, pp. 233-248.
- Lankford, J., & Ritchie, R. O., 1986, “Small fatigue cracks”, Warrendale: The Metallurgical Society of the American Institute of Mining, Metallurgical and Petroleum Engng.
- Mcdowell, J. R., 1953, “ Fretting Corrosion Tendencies of Several Combinations of Materials”, *Symposium on Fretting Corrsion, ASTM STP 144*, Philadelphia, pp. 24-39.
- Miller, R. J., & De Los Rios, E. R., 1986, “ The behavior of short fatigue cracks”. *Mechanical Engng Publ.*, London.
- Muskhelishvili, N. I., 1953, “Some basic problems of Mathematical theory of elasticity”, *Noordhoff, Gröningen*, 36, pp. 99-107.
- Nishioka, K., Hirakawa, K., 1969a, “ Fundamental investigations of fretting fatigue (part.2) – Fretting fatigue test machine and some results”, *Bull, JSME*, Vol. 12, No, 50, pp. 180-187.
- Nishioka, K., Hirakawa, K., 1969b, “ Fundamental investigations of fretting fatigue (part.3) –Some phenomena and mechanics of surface cracks”, *Bull, JSME*, Vol. 12, No, 51, pp. 397-407.

- Nishioka, K., Hirakawa, K., 1969c, “ Fundamental investigations of fretting fatigue (part.4) –The effect of mean stress”, Bull, JSME, Vol. 12, No, 52, pp. 408-414.
- Nishioka, K., Hirakawa, K., 1969d, “ Fundamental investigations of fretting fatigue (part.5) –The effect of relative slip amplitude”, Bull, JSME, Vol. 12, No, 52, pp. 692-697.
- Nishioka, K., Hirakawa, K., 1972, “ Fundamental investigations of fretting fatigue (part.6) ”, Bull, JSME, Vol. 15, No, 80, pp. 135-144
- Nowell, D., 1988, “ An analysis of fretting fatigue”, D. Phil. Thesis, Oxford University.
- peterson, R.E., 1959, “ Notch sensitivy”, Metal Fatigue, McGraw-Hill, New York, pp. 293-306.
- Smith, R. A., Liu, Y., & Grabowski, L., 1996, “ Short fatigue crack growth behavior in Waspaloy at room and elevated temperatures”, Engng. Mater. Struct., Vol. 19 No. 12, pp. 1505-1514.
- Susmel, L. “ Multiaxial notch fatigue: From nominal to local stress/strain quantities. 2009. Woodhead Publishing Limited, UK.
- Warlow-Davis, F. J., 1941, “ Fretting fatigue”, Waterhouse, R. B. Editor, Applied Science Publishers, UK.

# ANEXOS

	Pág.
<b>Anexo I</b>	
Rotinas implementadas em MATLAB	37

## POTENCIAIS DE MUSKHELISHVILI

```
% Rotina para o cálculo das tensões via potenciais de Muskhelishvili %%%%
% Raphael Araujo %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [sxxn_p0,sxxq_fp0,syyn_p0,syyq_fp0,sxyn_p0,sxyq_fp0,szzn_p0,...
        szzq_fp0]=muskhelishvili(x_a,y_a,v)

if x_a==0
    x_a=10^-8;
end

if y_a==0
    y_a=10^-8;
end

z=x_a + y_a*i;

s=sign(x_a);

% Potenciais de Muskhelishvili %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Contribuição da carga tangencial %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

c1=sqrt(z^2-1);
c2=conj(z)-s*sqrt(conj(z)^2-1);

phi1_q=-0.5*(z-s*c1);
phi2_q=-0.5*(1-s*z/c1);
phi3_q=-0.5*(z-s*c1);
phi4_q=-0.5*c2;

% Contribuição da cargas normal %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
phi1_p=-0.5*i*(z-s*c1);
phi2_p=-0.5*i*(1-s*z/c1);
phi3_p=-0.5*(-i)*(z-s*c1);
phi4_p=-0.5*(-i)*c2;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Tensões devido a carga normal (normalizadas) %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

soma1=(phi1_p+phi4_p)+((conj(z)-z)*phi2_p-phi3_p-phi1_p);
syyn_p0=real(soma1);
sxyn_p0=imag(soma1);
sxxn_p0=2*(phi1_p+phi4_p)-syyn_p0;

% Tensões devido a carga tangencial (normalizadas) %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

soma2=(phi1_q+phi4_q)+((conj(z)-z)*phi2_q-phi3_q-phi1_q);
syyq_fp0=real(soma2);
sxyq_fp0=imag(soma2);
sxxq_fp0=2*(phi1_q+phi4_q)-syyq_fp0;

szzn_p0=(sxxn_p0 + syyn_p0)*v;
szzq_fp0=(sxxq_fp0 + syyq_fp0)*v;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

## CAMPO DE TENSÕES

```
% Rotina para o cálculo das tensões de fretting %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Rapahel Araujo %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [sxx,sxy,syy,szz]=fretting2(x_a,y_a,a,Qmax_fP,sB_A,sB_m,f,v,p0,t)

Q_fP=Qmax_fP*sin(2*pi*t);           % Q_fP instantâneo
sB=sB_A*sin(2*pi*t)+sB_m;           % Carga remota instantânea
sB_max=sB_A+sB_m;                   % Carga remota máxima

c_a=sqrt(1 - Qmax_fP);               % Zona de adesão
e_a=sB_A/(4*f*p0);                  % Deslocamento devido a carga remota

[sxxn_p0,sxxt_fp0,syyn_p0,syyt_fp0,sxyn_p0,sxyt_fp0,szzn_p0,...
szzt_fp0]=muskhelishvili(x_a,y_a,v);

x_c=x_a/c_a;
y_c=y_a/c_a;
e_c=e_a/c_a;

[sxxn1_p0,sxxt1_fp0,syyn1_p0,syyt1_fp0,sxyn1_p0,sxyt1_fp0,szzn1_p0,...
szzt1_fp0]=muskhelishvili(x_c - e_c,y_c,v);

if t<1/4 | t>3/4                     % Carregamento

    c1_a=sqrt(1-abs((Qmax_fP-Q_fP)/2));
    e1_a=abs(sB_max-sB)/(8*f*p0);

    x_c1=x_a/c1_a;
    y_c1=y_a/c1_a;
    e1_c1=e1_a/c1_a;

    [sxxn2_p0,sxxt2_fp0,syyn2_p0,syyt2_fp0,sxyn2_p0,sxyt2_fp0,szzn2_p0,...
    szzt2_fp0]=muskhelishvili(x_c1 - e1_c1,y_c1,v);

    sxx=p0*sxxn_p0 + f*p0*sxxt_fp0 - 2*f*p0*c1_a*sxxt2_fp0 + ...
    f*p0*c_a*sxxt1_fp0 + sB;

    sxy=p0*sxyn_p0 + f*p0*sxyt_fp0 - 2*f*p0*c1_a*sxyt2_fp0 + ...
    f*p0*c_a*sxyt1_fp0;

    syy=p0*syyn_p0 + f*p0*syyt_fp0 - 2*f*p0*c1_a*syyt2_fp0 + ...
    f*p0*c_a*syyt1_fp0;

    szz=p0*szzn_p0 + f*p0*szzt_fp0 - 2*f*p0*c1_a*szzt2_fp0 + ...
    f*p0*c_a*szzt1_fp0;

elseif (t>1/4 & t<3/4)              % Descarregamento

    c1_a=sqrt(1-abs((Qmax_fP-Q_fP)/2));
    e1_a=(sB_max-sB)/(8*f*p0);

    x_c1=x_a/c1_a;
    y_c1=y_a/c1_a;
    e1_c1=e1_a/c1_a;
```



```

[sxxn2_p0,sxxt2_fp0,syyn2_p0,syyt2_fp0,sxyn2_p0,sxyt2_fp0,szzn2_p0,...
szzt2_fp0]=muskhelishvili(x_c1 - e1_c1,y_c1,v);

sxx=p0*sxxn_p0 - f*p0*sxxt_fp0 + 2*f*p0*c1_a*sxxt2_fp0 - ...
f*p0*c_a*sxxt1_fp0 + sB;

sxy=p0*sxyn_p0 - f*p0*sxyt_fp0 + 2*f*p0*c1_a*sxyt2_fp0 - ...
f*p0*c_a*sxyt1_fp0;

syy=p0*syyn_p0 - f*p0*syyt_fp0 + 2*f*p0*c1_a*syyt2_fp0 - ...
f*p0*c_a*syyt1_fp0;

szz=p0*szzn_p0 - f*p0*szzt_fp0 + 2*f*p0*c1_a*szzt2_fp0 - ...
f*p0*c_a*szzt1_fp0;

elseif t==1/4 % Carga máxima

sxx=p0*sxxn_p0 + f*p0*sxxt_fp0 - f*p0*c_a*sxxt1_fp0 + sB;
sxy=p0*sxyn_p0 + f*p0*sxyt_fp0 - f*p0*c_a*sxyt1_fp0;
syy=p0*syyn_p0 + f*p0*syyt_fp0 - f*p0*c_a*syyt1_fp0;
szz=p0*szzn_p0 + f*p0*szzt_fp0 - f*p0*c_a*szzt1_fp0;

else % Carma mínima

sxx=p0*sxxn_p0 - f*p0*sxxt_fp0 + f*p0*c_a*sxxt1_fp0 + sB;
sxy=p0*sxyn_p0 - f*p0*sxyt_fp0 + f*p0*c_a*sxyt1_fp0;
syy=p0*syyn_p0 - f*p0*syyt_fp0 + f*p0*c_a*syyt1_fp0;
szz=p0*szzn_p0 - f*p0*szzt_fp0 + f*p0*c_a*szzt1_fp0;

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

## CÁLCULO DO FATOR INTENSIDADE DE TENSÃO

```
% Programa para o cálculo do fator intensidade de tensão e estimativa do
% comprimento de trincas que param de crescer sob condições de fretting
% Raphael Araujo Cardoso %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clc
close all
clear all

% Condições de carregamento e parâmetros materiais

P=540;           % carga normal [227 ou 540] [N/mm]
sB_A=0;          % amplitude carga bulk [MPa]
sB_m=0;          % carga bulk média [Mpa]
f=0.9;           % coeficiente de atrito
R=40;            % raio sapata [mm]
E=[2.1e5 2e5];   % módulo de Young [MPa]
v=0.3;           % coeficiente de poisson
DK0=7;           % limiar de propagação de trincas longas [MPa.m^1/2]
sfl=270;         % resistência a fadiga [MPa]

% Cálculo parâmetros básicos

v1=v;
v2=v;
E1=E(1);          % [MPa]
E2=E(2);          % [MPa]
Req=R;            % [mm]
Eeq=((1-v1^2)/E1)+((1-v2^2)/E2))^(-1); % [MPa]
p0=sqrt((P*Eeq/(pi*Req))); % [Mpa]
a=2*((P*Req)/(pi*Eeq))^(1/2); % [mm]
mi=E(2)/(2*(v+1)); % [Mpa]
b0=1/pi*(DK0/(1.12*sfl))^2*10^3; % [mm]
k=3-4*v;

t=[1/4 3/4];      % intervalo de tempo
th=30*pi/180;     % inclinação da trinca

% Dados experimentais

if P==227;
    Qexp=[126 137 144 146 151 164 169]; % Carga tangencial [N/mm]
    bexp=[24 29 31 52 55 65 68]; % Comprimento de trinca medido [1e-6m]
else % (P=540 N/mm)
    Qexp=[242 243 278 280 282 283]; % Carga tangencial [N/mm]
    bexp=[14 28 77 61 52 75]; % Comprimento de trinca medido [1e-6m]
end

% Processamento

% Curvas para limiar de propagação de trincas curtas

bsize=linspace(10e-3,150e-3,50);

for i=1:length(bsize)
    if bsize(i)<=b0
        KT(i)=DK0*sqrt(bsize(i)/b0); % Kitagawa-Takahashi
```

```

else
    KT(i)=DK0;
end

EH(i)=DK0*sqrt(bsize(i)/(bsize(i)+b0));           % El-Haddad
end

% Cálculo do fator intensidade de tensão (distribuições das discordâncias)

n=40;

for jj=1:length(Qexp)
    Q=Qexp(jj);
    Qmax_fP=Q/(f*P);
    for ii=1:length(t)
        for l=1:length(bsize)
            b=bsize(l);
            for i=1:n
                s=cos(2*i/(2*n+1)*pi);
                xp=(s+1)*b/2;
                for j=1:n
                    r=cos((2*j-1)/(2*n+1)*pi);
                    cp=(r+1)*b/2;
                    [KSx KNx KSy KNy]=kernels(xp,cp,th);
                    A(i,j)=(2*pi*(1+r))/(2*n+1)*2*KSx;
                    A(i,j+n)=(2*pi*(1+r))/(2*n+1)*2*KSy;
                    A(n+i,j)=(2*pi*(1+r))/(2*n+1)*2*KNx;
                    A(i+n,j+n)=(2*pi*(1+r))/(2*n+1)*2*KNy;
                end

                x_a=-1+xp*sin(th)/a;
                y_a=xp*cos(th)/a;

                [sxx,sxy,syy,szz]=fretting2(x_a,y_a,a,Qmax_fP,sB_A,sB_m,f, ...
                    v,p0,t(ii));

                st(i,1)=-(sxx-syy)/2*sin(-2*th)+sxy*cos(-2*th);
                sn(i,1)=(sxx+syy)/2+(sxx-syy)/2*cos(-2*th)+sxy*sin(-2*th);
            end

            A=A*b/2;

            B=-pi*(k+1)/mi*[st;sn];

            phi=A\B;

            somax=0; somay=0;
            for i=1:n
                somax=somax+cot((2*i-1)/(2*n+1)*pi/2)*sin(n/(2*n+1)* ...
                    (2*i-1)*pi)*phi(i);
                somay=somay+cot((2*i-1)/(2*n+1)*pi/2)*sin(n/(2*n+1)* ...
                    (2*i-1)*pi)*phi(i+n);
            end

            phix=2/(2*n+1)*somax;
            phiy=2/(2*n+1)*somay;

            KI(1,ii)=2*sqrt(2*pi*b*10^-3)*mi/(k+1)*phiy;           % SIF modo I
            KII(1,ii)=2*sqrt(2*pi*b*10^-3)*mi/(k+1)*phix;         % SIF modo II
        end
    end
end

```

```

end
end

DKI=KI(:,1); % Variação de KI
DKII=KII(:,2)-KII(:,1); % Variação de KII

if th==0;
    DKeff=DKI;
else
    DKeff=sqrt(DKI.^2+DKII.^2); % SIF modo misto
end

% Estimativa do comprimento da trinca

F1=DKeff-KT';
F2=DKeff-EH';

bkt(jj)=interp1(F1,bsize*1000,0); % comprimento da trinca estimado (K-T)
beh(jj)=interp1(F2,bsize*1000,0); % comprimento da trinca estimado (E-H)
DK_est(jj)=interp1(bsize*1000,DKeff,bexp(jj));

end

% Pós processamento

erro_kt=(bkt-bexp)./bexp*100; % Erro na estimativa (K-T) [%]
erro_eh=(beh-bexp)./bexp*100; % Erro na estimativa (E-H) [%]

figure (1)

plot(bsize*1e3,DKeff,bsize*1e3,KT,bsize*1e3,EH)
xlabel('b (\mu m)')
ylabel('\Delta K_{eff} (MPa.m^{1/2})')
legend('\Delta K_{eff}', 'Diagrama K-T', 'Curva de El-Haddad')

Q_fP=Qexp/(f*P);
b_b0=bexp/(b0*10^3);
bkt_b0=bkt/(b0*10^3);
beh_b0=beh/(b0*10^3);

figure (2)

plot(Q_fP,b_b0,'*',Q_fP,bkt_b0,'o')
xlabel('normalized tangencial force loading, Q/fP')
ylabel('normalized crack length, b/b_{0}')
legend('Experimental data', 'Estimated crack length')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

## FUNÇÕES KERNELS

```
% Rotina para o cálculo das funções kernels %%%%%%%%%%%
% Rapahel Araujo %%%%%%%%%%%

function [KSx KNx KSy KNy]=kernels(xp,cp,th)

y=(xp-cp)*sin(th);      % Coordenata em y (horizontal)
x=xp*cos(th);           % Coordenada em x (vertical)
c=cp*cos(th);           % Ponto de colocação da descontinuidade

x1=x-c;
x2=x+c;
r1=sqrt(x1^2 + y^2);
r2=sqrt(x2^2 + y^2);

% Funções Kernels

Gxxx=y*(-1/r1^2 - 2*x1^2/r1^4 + 1/r2^2 + 2*x2^2/r2^4 - 4*c*x2/r2^4 + ...
4*c^2/r2^4 + 16*c*x2^3/r2^6 - 16*c^2*x2^2/r2^6);
Gxyy=y*(-1/r1^2 + 2*x1^2/r1^4 + 1/r2^2 - 2*x2^2/r2^4 + 12*c*x2/r2^4 - ...
4*c^2/r2^4 - 16*c*x2^3/r2^6 + 16*c^2*x2^2/r2^6);
Gxxy=-x1/r1^2 + 2*x1^3/r1^4 + x2/r2^2 - 2*c/r2^2 - 2*x2^3/r2^4 + ...
16*c*x2^2/r2^4 - 12*c^2*x2/r2^4 - 16*c*x2^4/r2^6 + 16*c^2*x2^3/r2^6;
Gyxx=-x1/r1^2 + 2*x1^3/r1^4 + x2/r2^2 - 2*c/r2^2 - 2*x2^3/r2^4 - ...
8*c*x2^2/r2^4 + 12*c^2*x2/r2^4 + 16*c*x2^4/r2^6 - 16*c^2*x2^3/r2^6;
Gyyy=3*x1/r1^2 - 2*x1^3/r1^4 - 3*x2/r2^2 - 2*c/r2^2 + 2*x2^3/r2^4 + ...
16*c*x2^2/r2^4 - 12*c^2*x2/r2^4 - 16*c*x2^4/r2^6 + 16*c^2*x2^3/r2^6;
Gyxy=y*(-1/r1^2 + 2*x1^2/r1^4 + 1/r2^2 - 2*x2^2/r2^4 - 4*c*x2/r2^4 + ...
4*c^2/r2^4 + 16*c*x2^3/r2^6 - 16*c^2*x2^2/r2^6);

% Transformação para o plano inclinado da trinca

Tx=[Gxxx;Gxyy;Gxxy]*cos(th)+[Gyxx;Gyyy;Gyxy]*sin(th);
Ty=[Gxxx;Gxyy;Gxxy]*(-sin(th))+[Gyxx;Gyyy;Gyxy]*cos(th);

KSx=1/2*(Tx(2)-Tx(1))*sin(2*th)+Tx(3)*cos(2*th);
KNx=Tx(1)*sin(th)^2+Tx(2)*cos(th)^2-Tx(3)*sin(2*th);

KSy=1/2*(Ty(2)-Ty(1))*sin(2*th)+Ty(3)*cos(2*th);
KNy=Ty(1)*sin(th)^2+Ty(2)*cos(th)^2-Ty(3)*sin(2*th);

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

